II Łódzkie Warsztaty Olimpijskie z Matematyki

Konopnica, 19-21 czerwca 2026

Spis treści

Wstęp

W dniach 19-21 czerwca 2026 roku w ośrodku Politechniki Łódzkiej w Konopnicy odbyły się II Łódzkie Warsztaty Olimpijskie z Matematyki. W trakcie warsztatów przeprowadzono 5 sesji zadaniowych z podziałem na dwie grupy zaawansowania: młodszą i starszą, wygłoszono 4 referaty uczestników oraz 1 referat przygotowany przez kadrę.

Kadrę stanowili Paweł Służewski, prowadzący koło olimpijskie na Politechnice Łódzkiej, oraz Jakub Świcarz, złoty medalista Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej. Organizacją wydarzenia zajmowała się dr Alina Kondratiuk-Janyska, CMF PŁ. Warsztaty nie mogłyby się odbyć bez uczestników, którzy z zaangażowaniem brali udział w sesjach, dzielili się swoimi pomysłami i wygłaszali referaty. Lista uczestników:

- I LO w Łodzi: Alicja Dems, Maria Janyska, Jakub Iżykowski, Łukasz Móga, Michał Roguz, Grzegorz Rudnicki, Jan Rudnicki, Modest Skrzetuski, Zygmunt Sobieszczyk, Szymon Sokołowski, Paweł Zygmunt,
- LO Uniwersytetu Łódzkiego: Zofia Myślińska,
- LO Politechniki Łódzkiej: Szymon Adamek, Mikołaj Badura, Adrian Chmielnicki, Kamil Lach, Emil Makal, Nina Muszyńska, Paweł Prośniewski.

Serdeczne podziękowania należą się Politechnice Łódzkiej za wsparcie finansowe, udostępnienie ośrodka oraz wiarę w sukces naszego przedsięwzięcia. Dzięki zaangażowaniu kadry i uczestników warsztaty udało się zorganizować już po raz drugi i miejmy nadzieję, że w kolejnych latach uda się kontynuować organizację łódzkich obozów matematycznych.

Referaty

W trakcie obozu wygłoszono cztery referaty przygotowane przez uczestników, dwa przygotowane dla grupy młodszej:

- Maria Janyska, *Potęga punktu* [Referat]
- Szymon Adamek, *Równania funkcyjne* [Referat]

dwa dla grupy starszej:

- Emil Makal, *Kolorowanie 2* [Referat]
- Mikołaj Badura, *Inwolucje* [Referat] [Handout]

oraz jeden referat przez kadrę obozu:

- Jakub Świcarz, *Konstrukcje w Teorii Liczb* [Referat]

Plan Dzienny Warsztatów

Dzień I (19.06)

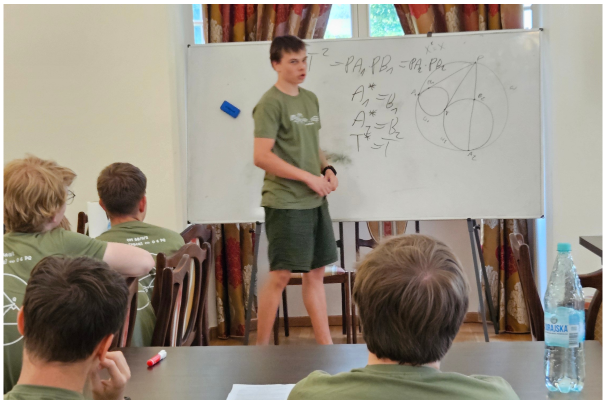
10:00 Pierwsza sesja zadaniowa
13:00 Obiad
14:00 Druga sesja zadaniowa
17:00 Przejazd do Konopnicy
18:00 Sprawy organizacyjne
18:30 Kolacja
19:15 Referaty + integracja
22:00 Cisza nocna

Dzień II (20.06)

8:30 Śniadanie
9:15 Trzecia sesja zadaniowa
13:00 Obiad
14:15 Referaty +
czwarta sesja zadaniowa
18:30 Kolacja
19:15 Początek meczu
22:00 Cisza nocna

Dzień III (21.06)

8:00 Msza (dla chętnych)
9:00 Śniadanie
10:00 Rozgrywka meczu +
omówienie zadań
13:00 Obiad
14:15 Referat Kuby +
piąta sesja zadaniowa
17:00 Zakończenie warsztatów



Zadania

Sesja I

Grupa Młodsza

1. Uzasadnij, że dla dowolnej liczby nieparzystej n, liczba $n^3 - n$ jest podzielna przez 24.

2. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Punkt D jest rzutem prostokątnym punktu C na prostą AB. Wykazać, że

$$\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCO.$$

3. Mamy szachownicę 8×8 z wyciętymi dwoma przeciwległymi rogami. Czy da się ją pokryć płytkami o wymiarach 1×2?

4. Wykaż, że

$$\frac{1}{1011} + \frac{1}{1012} + \ldots + \frac{1}{2020} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2019} - \frac{1}{2020}.$$

Grupa Starsza

1. Na planszy $n \times n$ panuje epidemia. Na początku chorych jest k pól - ognisk epidemii. Jeżeli pole sąsiaduje bokiem z co najmniej dwoma polami chorymi, to zostaje zarażone. Znaleźć najmniejsze k, dla którego istnieje k ognisk epidemii powodujących zarażenie całej planszy.

2. Wypukły sześciokąt $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ leży wewnątrz sześciokąta $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ w taki sposób, że $A_1A_2 \parallel B_1B_2$, $A_2A_3 \parallel B_2B_3$, …, $A_6A_1 \parallel B_6B_1$. Udowodnić, że pola sześciokątów $A_1B_2A_3B_4A_5B_6$ oraz $B_1A_2B_3A_4B_5A_6$ są sobie równe.

3. Niech $D(x)$ oznacza odległość liczby rzeczywistej x od najbliższej liczby całkowitej. Dowieść, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n istnieje taka liczba całkowita dodatnia $N \leqslant n^4$, że

$$D\left(N\sqrt{p}\right) < \frac{1}{n}$$

dla $p = 2, 3, 5, 7$.

4. Niech $f(x) = x^3(x^2+1)^{-1}$. Wyznaczyć wszystkie całkowite dodatnie wartości sumy $f(a) + f(b) + f(c)$ dla dowolnych liczb całkowitych a, b, c.

Sesja II

Grupa Młodsza

1. Na bokach BC, CA i AB trójkąta ABC zbudowano po jego zewnętrznej stronie trójkąty równoboczne BCD, CAE i ABF. Wykazać, że $AD = BE$.

2. Spośród liczb $1, 2, \ldots, 9$ wybrano sześć. Udowodnij, że spośród wybranych liczb można wybrać dwie, których suma jest równa 10.

3. Na tablicy narysowany jest 2012-kąt foremny. Michał i Jurek dorysowują na zmianę jedną przekątną, nie mającą wspólnych punktów wewnętrznych ani wspólnych końców z wcześniej narysowanymi przekątnymi. Przegrywa ten z graczy, który nie może wykonać ruchu. Grę rozpoczyna Michał. Który z graczy ma strategię wygrywającą?

4. Oblicz $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{99\cdot 100}$.

Grupa Starsza

1. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} ab + a + b = 1 \\ bc + b + c = 5 \\ ca + c + a = 5, \end{cases}$$

w liczbach rzeczywistych a, b, c.

2. Podczas defilady żołnierze mają być ustawieni w prostokąt, przy czym w każdym rzędzie mają stać od najwyższego do najniższego (żadni dwaj z nich nie są równego wzrostu). Dowódca ustawi ich w prostokącie jakkolwiek, po czym porządkuje według wzrostu w każdej kolumnie osobno, następnie zaś w każdym rzędzie (psując być może porządek w kolumnach), potem, jeśli trzeba, znów w kolumnach, znowu w rzędach etc. Czy ten sposób działania ma sens, tzn. czy niezależnie od początkowego ustawienia żołnierzy ta procedura zawsze po skończenie wielu takich przestawieniach da żądany efekt? A jeśli tak, to po ilu?

3. Mamy trójkąt równoramienny ABC ($AC = BC$) oraz punkt M wewnątrz tego trójkąta, taki że $\sphericalangle BCM = 80^\circ$, $\sphericalangle MCA = 20^\circ$ oraz $\sphericalangle CAM = 10^\circ$. Policz kąt $\sphericalangle AMB$.

4. Dane są takie liczby całkowite dodatnie p, k i q, że $p > k$ oraz p jest dzielnikiem pierwszym liczby $q^2 + k$. Dowieść, że istnieją takie liczby całkowite dodatnie a, m i n, że $a < 2\sqrt{k}$ oraz

$$pa = m^2 + kn^2$$

Sesja III

Grupa Młodsza

1. Wyznacz wszystkie pary (x, y) liczb całkowitych spełniające równanie $xy + 1 = x + y$.

2. Punkt H jest punktem przecięcia wysokości trójkąta ostrokątnego ABC. Wykazać, że punkty symetryczne do punktu H względem prostych AB, BC, CA leżą na okręgu opisanym na trójkącie ABC.

3. Na każdym polu tablicy 5×7 stoi pionek. Czy możliwe jest takie ponowne ustawienie pionków, by każdy z nich zajmował samotnie pole sąsiadujące z zajmowanym pierwotnie? Pola nazywamy sąsiadującymi, jeśli mają dokładnie jeden bok wspólny.

4. Wybrano 51 różnych liczb naturalnych mniejszych od 100. Udowodnić, że istnieją wśród nich takie dwie liczby, że pierwsza dzieli drugą.

5. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x^2 = 2y - 1 \\ y^2 = 2x - 1 \end{cases}$$

Grupa Starsza

1. Liczby rzeczywiste a, b spełniają równość $\left(a + \sqrt{a^2+1}\right) \cdot \left(b + \sqrt{b^2+1}\right) = 1$. Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości sumy $a + b$.

2. Rozwiązać równanie

$$x^{x+y} = (x + y)^y$$

w liczbach całkowitych dodatnich.

3. Rozważmy grę jednoosobową na nieskończonej szachownicy opartą na następującej regule. Jeżeli na dwóch polach mających wspólny bok stoją piony i następne pole jest puste (trzy omawiane pola leżą na jednej linii poziomej lub pionowej), to możemy te piony usunąć i postawić jeden pion na trzecim z tych pól (które było puste). Udowodnić, że jeżeli w pozycji początkowej piony wypełniają prostokąt o liczbie pól podzielnej przez 3, to nie możemy otrzymać pozycji, w której na szachownicy jest tylko jeden pion.

4. W czworokącie cyklicznym $ABCD$ (środek O) mamy $AC \perp BD$, a M, N, P, Q to środki boków AB, BC, CD, DA oraz M', N', P', Q' to rzuty M, N, P, Q na przeciwległe boki. Niech $S = AC \cap BD$. Udowodnić, że środek OS to środek okręgu opisanego na $M'N'P'Q$.

Sesja IV

Grupa Młodsza

1. Wykazać, że liczba $2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{99}$ jest podzielna przez 7.

2. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, przy czym $\sphericalangle ACB = 60^\circ$. Punkty D i E są rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów A i B na proste BC i AC. Punkt M jest środkiem boku AB. Wykazać, że trójkąt DEM jest równoboczny.

3. Wyznacz wszystkie pary (x, y) liczb całkowitych spełniające równanie $2xy + 3x + y = -1$.

4. Czy tablicę o wymiarach 10×10 można pokryć kostkami tetramino L?

Grupa Starsza

1. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie n, dla których liczba $n^{n^3} - n^n$ nie jest podzielna przez 5.

2. Trójkąt równoboczny ABC wpisano w okrąg o. Okrąg q jest styczny zewnętrznie do okręgu o w punkcie należącym do krótszego łuku BC. Z punktów A, B, C poprowadzono styczne do okręgu q odpowiednio w punktach D, E, F. Udowodnić, że $AD = BE + CF$.

3. Rozważmy tetramino powstałe poprzez złączenie dwóch płytek 2×1 wzdłuż ich dłuższych boków (tak, że środek dłuższego boku pierwszej kostki jest rogiem drugiej kostki). W ten sposób możemy otrzymać dwa rodzaje kostek tetramino o przeciwnej orientacji. Nazwijmy je S-tetramino i Z-tetramino. Załóżmy, że figurę (kratową) P można pokryć kostkami S-tetramino. Udowodnić, że jeśli pokryjemy P przy pomocy kostek S-tetramino i Z-tetramino, to zawsze użyjemy parzystą liczbę kostek Z-tetramino.

Sesja V

Grupa Młodsza

Warsztaty Matematyczne w Konopnicy, 19–21 czerwca 2026

Sesja V – grupa młodsza

1. Liczby naturalne a i b spełniają równość $56a = 65b$. Uzasadnij, że liczba $a + b$ jest złożona.

2. Wiadomo, że $\frac{3a}{3a+b} = \frac{2}{5}$. Oblicz $\frac{b}{3a+b}$.

3. Każdy punkt koła domkniętego o promieniu 1 pomalowano na jeden z trzech kolorów. Dowieść, że istnieją dwa punkty tego samego koloru, których odległość wynosi 1.

4. Punkt P leży wewnątrz równoległoboku $ABCD$, przy czym $\sphericalangle ABP = \sphericalangle ADP$. Dowieść, że

$$\sphericalangle DAP = \sphericalangle DCP.$$

Grupa Starsza

1. W kolejce do kina stoi n osób (przy czym kolejność osób w kolejce nigdy się nie zmienia). Osoby te są wpuszczane do kina w k grupach, z których każda składa się z jednej lub więcej osób. Na ile sposobów można utworzyć tych k grup?

2. Liczby p oraz $p + 2$ są pierwsze. Dowieść, że istnieje ciąg kolejnych liczb całkowitych (więcej niż jednej), których iloczyn przy dzieleniu przez $p(p + 2)$ daje resztę $p^2 + p - 1$.

3. Niech H to ortocentrum trójkąta ABC, a M to środek BC. Niech X będzie punktem przecięcia odcinka AM z okręgiem opisanym na trójkącie BCH. Niech ponadto E i F będą spodkami wysokości w ABC poprowadzonymi odpowiednio z punktów B i C. Udowodnić, że BC, HX i EF przecinają się w jednym punkcie.

4. Znajdź minimalną wartość wyrażenia $3x^2 + 3y^2 + z^2$, jeśli $xy + yz + zx = 1$.

Mecz Matematyczny

1. Wyznaczyć wszystkie trójki liczb całkowitych x, y, z spełniające równanie

$$\frac{x+y+xyz}{yz+1} = \frac{2025}{44}.$$

2. Czy istnieje rosnący ciąg liczb całkowitych dodatnich a_1, a_2, …, taki że dla każdego rosnącego ciągu arytmetycznego $b_1, b_2, \ldots$, istnieje co najwyżej skończenie wiele liczb pierwszych w postaci $a_i + b_i$?

3. Dane są całkowite i dodatnie liczby a i b. Udowodnić, że dla dowolnie dużej liczby n równanie

$$x^2 - 2axy + (a^2 - 4b)y^2 + 4by = z^2$$

ma rozwiązanie w liczbach całkowitych (x_0, y_0, z_0) spełniające warunek $\min(x_0, y_0, z_0) > n$.

4. Różne niezerowe liczby rzeczywiste a, b, c spełniają równości

$$a^2 + \frac{1}{a} = b^2 + \frac{1}{b} = c^2 + \frac{1}{c}.$$

Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości sumy $a + b + c$.

5. Funkcja g przyporządkowuje każdej (uporządkowanej) parze x, y liczb rzeczywistych dodatnich wartość $g(x, y)$ określoną jako najmniejsza liczba z trójki x, $1/y$, $(xy+1)/x$. Wyznaczyć kres górny wartości $g(x, y)$, gdy x oraz y przebiegają zbiór wszystkich liczb dodatnich.

6. Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych nieujemnych a,b,c zachodzi nierówność

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} + \sqrt{c^2 - ca + a^2} \leqslant a + b + c + \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca}.$$

7. Dany jest zbiór $n \geqslant 2$ punktów leżących wewnątrz kuli o promieniu 1. Dla $i = 1, 2, \ldots, n$ niech x_i oznacza odległość i-tego punktu danego zbioru od najbliższego innego punktu tego zbioru. Dowieść, że

$$x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3 \leqslant 64.$$

8. Króla szachowego ustawiono na pewnym polu szachownicy 8×8 i wykonano nim 64 ruchy tak, że odwiedził wszystkie pola planszy i wrócił na pole początkowe. Ruch nazwiemy *konopnickim*, jeżeli na skutek jego wykonania zmniejszyła się odległość środka pola, na którym stoi król, od środka szachownicy. Jaka jest największa możliwa liczba konopnickich ruchów?

9. Zawodnicy $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{2004}$ biorą udział w Meczu Matematycznym. Zawodnicy Z_{2003} i Z_{2004} są kapitanami i wybierają swoje drużyny według następującego algorytmu: w każdej rundzie najpierw kapitan Z_{2004} wyznacza zawodnika spośród dotąd niewybranych, a Z_{2003} decyduje, do której drużyny on trafi, następnie Z_{2003} wyznacza zawodnika spośród dotąd niewybranych, a Z_{2004} decyduje, do której drużyny on trafi. Procedura powtarzana jest do momentu, w którym jedna z drużyn będzie liczyć już 1002 zawodników – wtedy wszyscy pozostali trafiają do drużyny przeciwnej. Dla każdego i zawodnik Z_i rozwiąże podczas meczu i zadań, przy czym każde zadanie zostanie rozwiązane przez co najwyżej jednego zawodnika. Mecz wygra drużyna, która rozwiąże łącznie więcej zadań. Rozstrzygnąć, który z kapitanów (jeśli którykolwiek) posiada strategię wybierania drużyny pozwalającą mu, niezależnie od zachowania przeciwnika, zapewnić swojej drużynie zwycięstwo w Meczu Matematycznym.

10. Okręgi ω_1 i ω_2 są styczne zewnętrznie w punkcie T i styczne wewnętrznie do okręgu ω odpowiednio w punktach A_1 i A_2. Niech P będzie punktem przecięcia ω ze wspólną styczną ω_1 i ω_2 w T. Prosta PA_1 przecina ω_1 po raz drugi w punkcie B_1, a prosta PA_2 po raz drugi okrąg ω_2 w punkcie B_2. Udowodnić, że B_1B_2 jest wspólną styczną okręgów ω_1 i ω_2.

11. Na obwodzie trójkąta ABC wybrano punkty D_1, D_2, E_1, E_2, F_1, F_2 w następującej kolejności A, F_1, F_2, B, D_1, D_2, C, E_1, E_2. Ponadto

$$AD_1 = AD_2 = BE_1 = BE_2 = CF_1 = CF_2.$$

Udowodnić, że obwody trójkątów wyznaczonych przez proste AD_1, BE_1, CF_1 oraz AD_2, BE_2, CF_2 są równe.

12. Mamy trójkąt ABC, w którym I to środek okręgu wpisanego, a D, E, F to punkty styczności tego okręgu do boków BC, CA, AB odpowiednio. Niech M to rzut D na EF. Udowodnij, że środek DM, EF oraz ortocentrum BIC są współliniowe.

Rozwiązania

Sesja I

Grupa Młodsza

1. Uzasadnij, że dla dowolnej liczby nieparzystej n, liczba $n^3 - n$ jest podzielna przez 24.

Rozwiązanie: Oczywiście $24 = 2^3 \cdot 3$. Zauważmy, że możemy zapisać

$$n^3 - n = n(n^2 - 1).$$

Jeżeli $3 \mid n$, to powyższe wyrażenie także jest podzielne przez 3. Jeżeli $3 \nmid n$, to widzimy, że skoro n^2 daje tylko reszty $0, 1$ przy dzieleniu przez 3, to $3 \mid n^2 - 1$. Skoro n jest nieparzyste, to możemy zapisać $n = 2k + 1$ dla pewnej liczby całkowitej nieujemnej k. Mamy wtedy

$$(2k+1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4k(k+1).$$

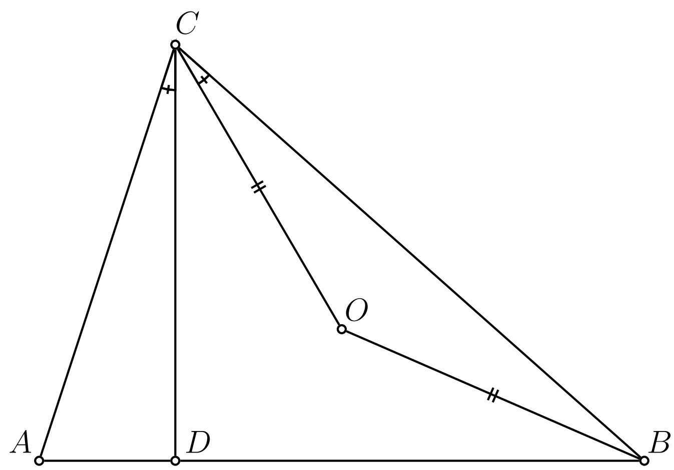
Jedna z liczb $k, k+1$ jest parzysta, tym samym powyższe wyrażenie jest także podzielne przez 8. Udowodniliśmy w ten sposób, że liczba $n^3 - n$ jest podzielna przez $3 \cdot 8 = 24$.

2. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Punkt D jest rzutem prostokątnym punktu C na prostą AB. Wykazać, że

$$\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCO.$$

Rozwiązanie: Z definicji punktu O wiemy, że $OB = OC$, tym samym $\sphericalangle BCO = 90^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle BOC$. Jednocześnie z twierdzenia o kącie środkowym i wpisanym wiemy, że $\sphericalangle BAC = \frac{1}{2}\sphericalangle BOC$. Ale skoro $\sphericalangle ADC = 90^\circ$, to ostatecznie otrzymujemy zależności

$$\sphericalangle ACD = 90^\circ - \sphericalangle CAD = 90^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle BOC = \sphericalangle BCO.$$



3. Mamy szachownicę 8×8 z wyciętymi dwoma przeciwległymi rogami. Czy da się ją pokryć płytkami o wymiarach 1×2?

Rozwiązanie: Pokolorujmy szachownicę w taki sposób, w jaki pokolorowana jest szachownica do gry w szachy - na przemian kolorami czarnym i białym tak, aby dwa pola o wspólnej krawędzi były różnych kolorów. Wtedy każda płytka 1×2 pokrywa dokładnie jedno pole czarne, jedno białe, tym samym jeżeli szachownicę dałoby się pokryć, to liczby pól o kolorze białym i czarnym musiałyby być równe. Ale skoro dwa przeciwległe rogi są usunięte, to pól jednego koloru będzie 30, a pól drugiego koloru 32. Otrzymujemy w ten sposób, że takiej szachownicy nie da się pokryć płytkami 1×2.

4. Wykaż, że

$$\frac{1}{1011} + \frac{1}{1012} + \ldots + \frac{1}{2020} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2019} - \frac{1}{2020}.$$

Rozwiązanie: Przeprowadzimy dowód indukcyjny. Oczywiście widzimy, że $\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$. Będzie to stanowić bazę naszej indukcji.

Założenie indukcyjne: spełniona jest równość

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}.$$

Teza indukcyjna: spełniona jest równość

$$\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n+2} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}.$$

Odejmując od lewej strony tezy indukcyjnej lewą stronę założenia indukcyjnego oraz od prawej strony tezy indukcyjnej prawą stronę założenia indukcyjnego otrzymujemy równoważną tezie indukcyjnej równość

$$\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \iff 2 \cdot \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{n+1}$$

co jest oczywiście prawdziwe. Wówczas podstawiając $n = 1010$ otrzymujemy tezę.

Grupa Starsza

1. Na planszy $n \times n$ panuje epidemia. Na początku chorych jest k pól - ognisk epidemii. Jeżeli pole sąsiaduje bokiem z co najmniej dwoma polami chorymi, to zostaje zarażone. Znaleźć najmniejsze k, dla którego istnieje k ognisk epidemii powodujących zarażenie całej planszy.

Rozwiązanie: Będziemy traktować pola jako kwadraty jednostkowe. Na początku jeżeli chorych jest k pól, to obwód figury, która tworzona jest przez k zarażonych pól jest równy $4k$. Zauważmy jednocześnie, że jeżeli nowe pole zostaje zarażone, to ma co najmniej dwóch chorych sąsiadów bokiem, tym samym zwiększa ono obwód figury o co najwyżej 2. Jednocześnie wcześniej wliczane do obwodu boki z poprzednich pól, z których sąsiaduje nowe pole, nie wliczają się już do obwodu, co powoduje pomniejszenie obwodu figury o co najmniej 2. Tym samym obwód figury nie powiększa się. Skoro na końcu cała figura ma zostać zarażona, to końcowy obwód wynosi $4n$, czyli $4k \geqslant 4n$, co daje nam $k \geqslant n$. Pozostaje zauważyć, że jeżeli na początku zarażone jest każde pole na jednej z przekątnych planszy $n \times n$, czyli dokładnie n pól, to cała plansza na końcu będzie zarażona.

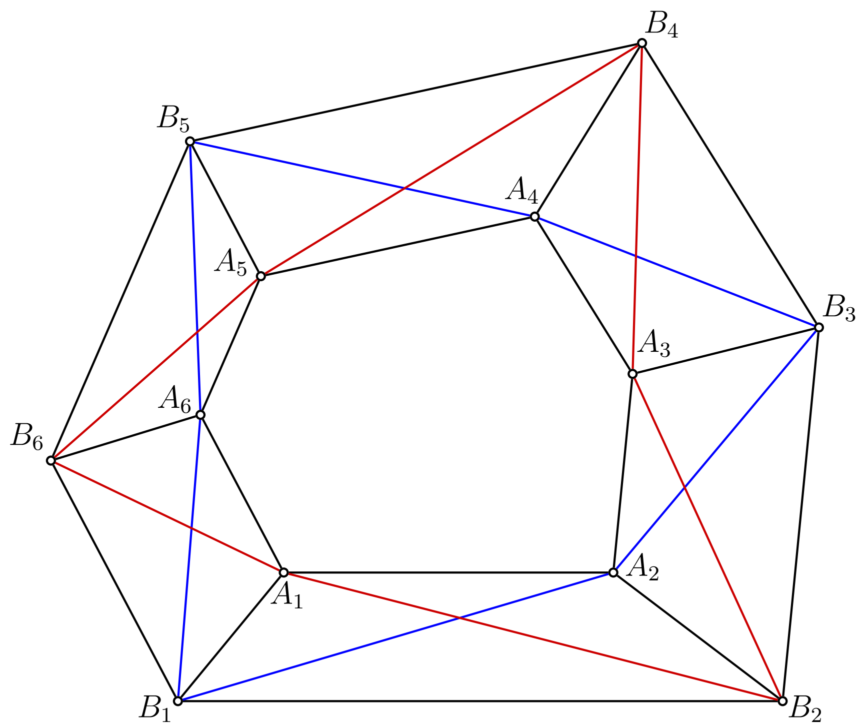
Odpowiedź: $k = n$.

2. Wypukły sześciokąt $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ leży wewnątrz sześciokąta $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ w taki sposób, że $A_1A_2 \parallel B_1B_2$, $A_2A_3 \parallel B_2B_3$, …, $A_6A_1 \parallel B_6B_1$. Udowodnić, że pola sześciokątów $A_1B_2A_3B_4A_5B_6$ oraz $B_1A_2B_3A_4B_5A_6$ są sobie równe.

Rozwiązanie: Możemy zauważyć, że dla każdego $i = 1, 2, \ldots, 6$ (zakładamy, że $A_7 = A_1$ oraz $B_7 = B_1$) czworokąt $A_iA_{i+1}B_{i+1}B_i$ jest trapezem, więc zachodzi równość $[A_iA_{i+1}B_i] = [A_iA_{i+1}B_{i+1}]$. Stąd

$$\begin{aligned}&[A_1B_2A_3B_4A_5B_6] = \\ &= [A_1A_2A_3A_4A_5A_6] + [A_1A_2B_2] + [A_2A_3B_2] + [A_3A_4B_4] + [A_4A_5B_4] + [A_5A_6B_6] + [A_6A_1B_6] = \\ &= [A_1A_2A_3A_4A_5A_6] + [A_1A_2B_1] + [A_2A_3B_3] + [A_3A_4B_3] + [A_4A_5B_5] + [A_5A_6B_5] + [A_6A_1B_1] = \\ &= [B_1A_2B_3A_4B_5A_6]\end{aligned}$$

co kończy dowód.



3. Niech $D(x)$ oznacza odległość liczby rzeczywistej x od najbliższej liczby całkowitej. Dowieść, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n istnieje taka liczba całkowita dodatnia $N \leqslant n^4$, że

$$D\left(N\sqrt{p}\right) < \frac{1}{n}$$

dla $p = 2, 3, 5, 7$.

Rozwiązanie: Rozważmy hipersześcian jednostkowy oraz podzielmy go na n^4 hipersześcianów o boku długości $\frac{1}{n}$. Dla $N \in \{0, 1, \dots n^4\}$ rozważamy punkt

$$A_N = (\{N\sqrt{2}\}, \{N\sqrt{3}\}, \{N\sqrt{5}\}, \{N\sqrt{7}\})$$

gdzie $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby rzeczywistej x. Oczywiście każdy punkt A_N leży wewnątrz hipersześcianu jednostkowego. Zauważmy jednocześnie, że punktów A_N jest $n^4 + 1$, a hipersześcianów, na które podzieliliśmy hipersześcian jednostkowy, jest n^4, tym samym z zasady szufladkowej Dirichleta otrzymujemy, że istnieją takie dwie liczby całkowite dodatnie $k > l$, że punkty A_k i A_l leżą w tym samym hipersześcianie o boku długości $\frac{1}{n}$. Stąd dla każdej $p = 2, 3, 5, 7$ zachodzi

$$D\left(k\sqrt{p} - l\sqrt{p}\right) = D\left((k-l)\sqrt{p}\right) < \frac{1}{n}.$$

Pozostaje wybrać $N = k - l$.

4. Niech $f(x) = x^3(x^2+1)^{-1}$. Wyznaczyć wszystkie całkowite dodatnie wartości sumy $f(a) + f(b) + f(c)$ dla dowolnych liczb całkowitych a, b, c.

Rozwiązanie: Zauważmy, że zachodzi zależność

$$\frac{x^3}{x^2+1} = \frac{x^3+x}{x^2+1} - \frac{x}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1}.$$

Wynika z tego, że możemy zapisać

$$\sum_{cyc} \frac{a^3}{a^2+1} = a + b + c - \frac{a}{a^2+1} - \frac{b}{b^2+1} - \frac{c}{c^2+1}$$

czyli aby wyrażenie z treści było całkowite, to wystarczy, aby suma

$$\frac{a}{a^2+1} + \frac{b}{b^2+1} + \frac{c}{c^2+1}$$

była całkowita. Jednocześnie zauważmy, że dla dowolnej liczby całkowitej n zachodzi

$$-\frac{1}{2} \leqslant \frac{n}{n^2+1} \leqslant \frac{1}{2},$$

przy czym równość po prawej zachodzi tylko dla $n = 1$, a równość po lewej tylko dla $n = -1$, z czego wynika, że

$$\frac{a}{a^2+1} + \frac{b}{b^2+1} + \frac{c}{c^2+1} \in \{-1, 0, 1\}.$$

Na początek rozważmy przypadek, w którym powyższa suma jest równa 0. Załóżmy, że istnieją takie liczby całkowite dodatnie x, y, z, że

$$\frac{x}{x^2+1} + \frac{y}{y^2+1} = \frac{z}{z^2+1}.$$

Bez straty ogólności możemy założyć, że $x \leqslant y$, tym samym $z < x \leqslant y$. Oznaczmy $S = x + y - z, \quad P = xy - xz - yz$. Po sprowadzeniu równania do wspólnego mianownika dostajemy

$$(x+y-z)(xy-xz-yz+1) = xyz(xy-xz-yz-3).$$

Ponieważ $z < x \leqslant y$, mamy $xyz > x + y - z$. Przekształcając ostatnią równość dostajemy

$$(xy - xz - yz)(xyz - x + y - z) = 3xyz + x + y - z$$

A ponieważ

$$3xyz + x + y - z = 3(xyz - (x + y - z)) + 4(x + y - z)$$

to otrzymujemy

$$xy - xz - yz = 3 + \frac{4(x + y - z)}{xyz - (x + y - z)}.$$

$xy-xz-yz$ jest całkowite, więc $\dfrac{4(x + y - z)}{xyz - (x + y - z)}$ jest dodatnią liczbą całkowitą. W szczególności

$$xyz - (x + y - z) \leqslant 4(x + y - z) \Longrightarrow xyz \leqslant 5(x + y - z).$$

Rozważmy teraz przypadki. Jeżeli $z = 1$, to mamy

$$\frac{x}{x^2 + 1} + \frac{y}{y^2 + 1} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \frac{1}{4} \leqslant \frac{x}{x^2 + 1} \Longrightarrow x^2 - 4x + 1 \leqslant 0.$$

Skoro $z = 1 < x$, mamy tylko możliwości $x = 2$ lub $x = 3$. Dla $x = 2$ mamy

$$\frac{y}{y^2 + 1} = \frac{1}{2} - \frac{2}{5} = \frac{1}{10} \Longrightarrow y^2 - 10y + 1 = 0 \Longrightarrow y \notin \mathbb{Z}.$$

Dla $x = 3$ dostajemy

$$\frac{y}{y^2 + 1} = \frac{1}{2} - \frac{3}{10} = \frac{1}{5} \Longrightarrow y^2 - 5y + 1 = 0 \Longrightarrow y \notin \mathbb{Z}.$$

Rozważmy teraz przypadek, w którym $z \geqslant 2$. Przekształcając wcześniej otrzymaną nierówność mamy

$$y(xz - 5) \leqslant 5(x - z)$$

a skoro $z \geqslant 2$ oraz $x > z$, to mamy $xz - 5 > 0$. Wówczas z $y \geqslant x$ mamy

$$x(xz - 5) \leqslant 5(x - z) \Longrightarrow zx^2 - 10x + 5z \leqslant 0.$$

Jeśli $z \geqslant 3$, to $x \geqslant z + 1$, więc

$$zx^2 - 10x + 5z \geqslant z(z + 1)^2 - 10(z + 1) + 5z = z^3 + 2z^2 - 4z - 10 > 0$$

co przeczy otrzymanej wcześniej nierówności. Wynika z tego, że $z = 2$. Mamy wówczas nierówność

$$2x^2 - 10x + 10 \leqslant 0 \Longrightarrow x = 3$$

ponieważ $x > z = 2$. Wówczas otrzymujemy zależność

$$\frac{y}{y^2 + 1} = \frac{2}{5} - \frac{3}{10} = \frac{1}{10} \Longrightarrow y^2 - 10y + 1 = 0 \Longrightarrow y \notin \mathbb{Z}.$$

Stąd nie istnieją liczby całkowite dodatnie x, y, z spełniające dane równanie. Bezpośrednio z tego otrzymujemy wniosek

$$\frac{a}{a^2+1}+\frac{b}{b^2+1}+\frac{c}{c^2+1}=0 \Longrightarrow \frac{c}{c^2+1}=0, \quad \frac{a}{a^2+1}=-\frac{b}{b^2+1}.$$

Wtedy jednak mamy, że $f(a)+f(b)+f(c)=0$, co nie jest liczbą dodatnią. Rozważmy teraz trójki, dla których

$$\frac{a}{a^2+1}+\frac{b}{b^2+1}+\frac{c}{c^2+1}=1.$$

Znajdując wszystkie takie trójki otrzymamy także trójki (a, b, c) takie, że powyższa suma równa jest -1, gdyż wystarczy wtedy wziąć odwrotności liczb. Jeżeli liczba a jest ujemna, to $\frac{a}{a^2+1}$ jest ujemne. Wtedy dwa pozostałe składniki musiałyby dać więcej niż 1, co jest niemożliwe, bo każdy z nich jest co najwyżej równy $\frac{1}{2}$. Jeżeli jedna z liczb jest równa 0, to dwa pozostałe składniki muszą być równe $\frac{1}{2}$, więc odpowiadające im liczby muszą być równe 1. Dostajemy zatem rozwiązanie

$$(a, b, c)=(0,1,1).$$

które daje nam

$$f(a)+f(b)+f(c)=0+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

Załóżmy teraz, że liczby a, b, c są dodatnie. Bez straty ogólności załóżmy, że $1 \leqslant a \leqslant b \leqslant c$. Dla dodatnich liczb całkowitych wyrażenie $\frac{n}{n^2+1}$ maleje wraz ze wzrostem n, zatem

$$\frac{a}{a^2+1} \geqslant \frac{b}{b^2+1} \geqslant \frac{c}{c^2+1}$$

a skoro suma tych trzech liczb jest równa 1, to

$$3 \cdot \frac{a}{a^2+1} \geqslant 1 \Longrightarrow \frac{a}{a^2+1} \geqslant \frac{1}{3}.$$

Otrzymujemy wówczas dwa przypadki: $a=1$ oraz $a=2$. Rozważmy najpierw przypadek dla $a=1$. Wtedy

$$\frac{b}{b^2+1}+\frac{c}{c^2+1}=\frac{1}{2}.$$

Ponieważ $b \leqslant c$, mamy

$$\frac{b}{b^2+1} \geqslant \frac{c}{c^2+1} \Longrightarrow \frac{b}{b^2+1} \geqslant \frac{1}{4}.$$

Otrzymujemy z tego, że $b \leqslant 3$. Sprawdzając przypadki mamy:

1. $b=1 \Longrightarrow \dfrac{c}{c^2+1}=0$, sprzeczność.

2. $b=2 \Longrightarrow \dfrac{c}{c^2+1}=\dfrac{1}{10}$, co oznaczałoby, że c nie jest całkowite, sprzeczność.

3. $b=3 \Longrightarrow \dfrac{c}{c^2+1}=\dfrac{1}{5}$, co oznaczałoby, że c nie jest całkowite, sprzeczność.

Rozważmy teraz przypadek, w którym $a = 2$. Wtedy

$$\frac{b}{b^2+1} + \frac{c}{c^2+1} = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}.$$

a skoro $b \leqslant c$, to mamy

$$\frac{b}{b^2+1} \geqslant \frac{c}{c^2+1} \Longrightarrow \frac{b}{b^2+1} \geqslant \frac{3}{10}.$$

Otrzymujemy z tego, że $b \leqslant 3$. Sprawdzając przypadki mamy:

1. $b = 1 \Longrightarrow \dfrac{c}{c^2+1} = \dfrac{1}{10}$, co oznaczałoby, że c nie jest całkowite, sprzeczność.

2. $b = 2 \Longrightarrow \dfrac{c}{c^2+1} = \dfrac{1}{5}$, co oznaczałoby, że c nie jest całkowite, sprzeczność.

3. $b = 3 \Longrightarrow \dfrac{c}{c^2+1} = \dfrac{3}{10}$ - wówczas $3c^2 - 10c + 3 = 0$, czyli $c = 3$, co daje nam rozwiązanie $(a, b, c) = (2, 3, 3)$, czyli $f(a) + f(b) + f(c) = 7$

Rozważając przypadek

$$\frac{a}{a^2+1} + \frac{b}{b^2+1} + \frac{c}{c^2+1} = -1$$

widzimy, że suma $f(a) + f(b) + f(c)$ będzie ujemna, ponieważ rozwiązania będą odwrotnościami rozwiązań przypadku, w którym suma ta jest równa 1.

Odpowiedź: $f(a) + f(b) + f(c) \in \{1, 7\}$.

Sesja II

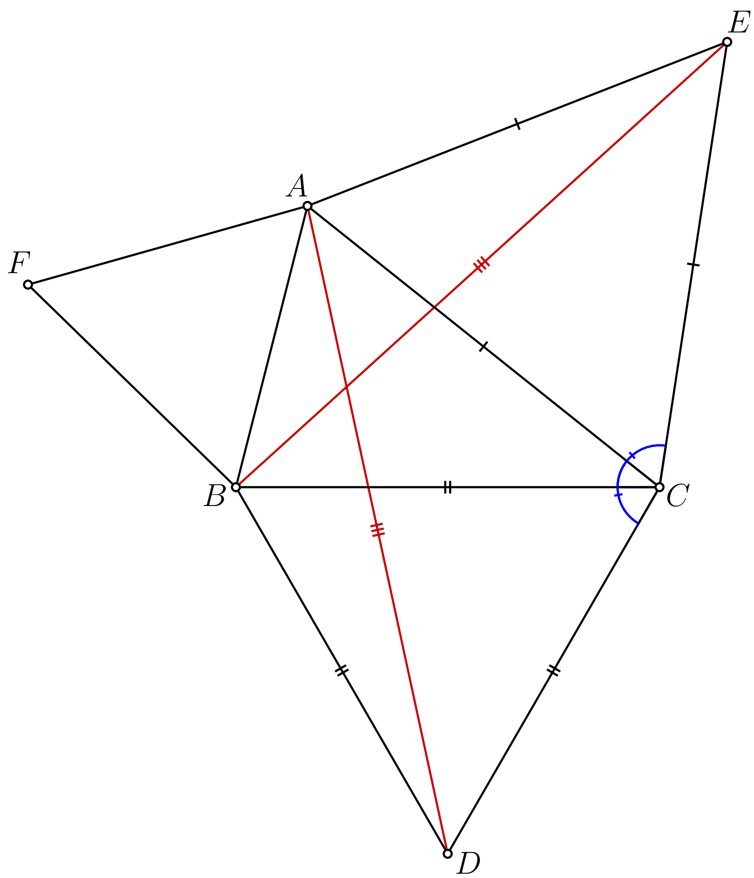
Grupa Młodsza

1. Na bokach BC, CA i AB trójkąta ABC zbudowano po jego zewnętrznej stronie trójkąty równoboczne BCD, CAE i ABF. Wykazać, że $AD = BE$.

Rozwiązanie: Możemy zauważyć, że $CE = CA$, $CB = CD$ oraz

$$\sphericalangle ECB = \sphericalangle ECA + \sphericalangle ACB = 60^\circ + \sphericalangle ACB = \sphericalangle ACB + \sphericalangle BCD = \sphericalangle ACD$$

więc z cechy przystawania bok-kąt-bok otrzymujemy, że trójkąty ECB i ACD są przystające, skąd $EB = AD$, co kończy dowód.



2. Spośród liczb $1, 2, \dots, 9$ wybrano sześć. Udowodnij, że spośród wybranych liczb można wybrać dwie, których suma jest równa 10.

Rozwiązanie: Rozważmy pary liczb

$$(1, 9), \qquad (2, 8), \qquad (3, 7), \qquad (4, 6).$$

W każdej parze liczby sumują się do 10. W parach znajdują się także wszystkie liczby ze zbioru $\{1, 2, \dots 9\}$ różne od 5, tym samym wybierając 6 liczb widzimy, że na mocy zasady szufladkowej

Dirichleta istnieją dwie liczby w jednej parze, które obie zostaną wybrane przy wyborze sześciu liczb.

3. Na tablicy narysowany jest 2012-kąt foremny. Michał i Jurek dorysowują na zmianę jedną przekątną, nie mającą wspólnych punktów wewnętrznych ani wspólnych końców z wcześniej narysowanymi przekątnymi. Przegrywa ten z graczy, który nie może wykonać ruchu. Grę rozpoczyna Michał. Który z graczy ma strategię wygrywającą?

Rozwiązanie: Pokażemy, że Michał ma strategię wygrywającą. Oznaczmy wierzchołki 2012-kąta foremnego przez $A_1, A_2, \ldots, A_{2012}$. Michał w pierwszym ruchu rysuje przekątną A_1A_{1007}. Wtedy każdy następny ruch będzie albo wykonany w całości pod albo nad tą przekątną. Wystarczy teraz, aby Michał utrzymywał symetrię pomiędzy obiema połowami 2012-kąta. Kiedy Jurek wykonuje ruch, wystarczy, aby Michał wykonał ruch symetryczny do tego ruchu względem przekątnej A_1A_{1007}. Z symetrii wynika, że wykonanie takiego ruchu zawsze będzie możliwe, czyli Michał zawsze będzie miał ruch po ruchu Jurka, co tym samym oznacza, że ma strategię wygrywającą.

4. Oblicz $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{99\cdot 100}$.

Rozwiązanie: Możemy policzyć, że

$$\sum_{i=1}^{99} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{99} \frac{(i+1)-i}{i\cdot(i+1)} = \sum_{i=1}^{99}\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) = \sum_{i=1}^{99}\frac{1}{i} - \sum_{i=2}^{100}\frac{1}{i} = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}.$$

Grupa Starsza

1. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} ab + a + b = 1 \\ bc + b + c = 5 \\ ca + c + a = 5, \end{cases}$$

w liczbach rzeczywistych a, b, c.

Rozwiązanie: Odejmując trzecie równanie od drugiego, otrzymujemy zależność

$$bc + b + c - ca - c - a = 0 \Longrightarrow (b-a)(c+1) = 0.$$

Otrzymujemy wówczas dwa przypadki: $a = b$ oraz $c = -1$.

Jeżeli $a = b$, to z pierwszego równania mamy

$$a^2 + 2a = 1 \Longrightarrow a = -1 \pm \sqrt{2}.$$

Ponadto z drugiego równania dostajemy dla $a = -1 + \sqrt{2}$ mamy

$$c = \frac{5-a}{a+1} = \frac{6-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} - 1.$$

Dostajemy w ten sposób rozwiązanie

$$(a, b, c) = \left(-1+\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}, 3\sqrt{2}-1\right).$$

Dla $a = -1 - \sqrt{2}$ mamy $a + 1 = -\sqrt{2}$, więc

$$c = \frac{5-a}{a+1} = \frac{6+\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = -3\sqrt{2} - 1.$$

Dostajemy w ten sposób rozwiązanie

$$(a, b, c) = \left(-1 - \sqrt{2}, -1 - \sqrt{2}, -3\sqrt{2} - 1\right).$$

Rozważmy teraz przypadek $c = -1$. Z drugiego równania otrzymujemy

$$bc + b + c = b \cdot -1 + b - 1 = -1$$

co jest sprzeczne z równością $bc + b + c = 5$. Łatwo zauważyć, że otrzymane trójki spełniają tezę zadania.

Odpowiedź: $(a, b, c) = \left(-1 + \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}, 3\sqrt{2} - 1\right), \left(-1 - \sqrt{2}, -1 - \sqrt{2}, -3\sqrt{2} - 1\right)$

2. Podczas defilady żołnierze mają być ustawieni w prostokąt, przy czym w każdym rzędzie mają stać od najwyższego do najniższego (żadni dwaj z nich nie są równego wzrostu). Dowódca ustawi ich w prostokącie jakkolwiek, po czym porządkuje według wzrostu w każdej kolumnie osobno, następnie zaś w każdym rzędzie (psując być może porządek w kolumnach), potem, jeśli trzeba, znów w kolumnach, znowu w rzędach etc. Czy ten sposób działania ma sens, tzn. czy niezależnie od początkowego ustawienia żołnierzy ta procedura zawsze po skończenie wielu takich przestawieniach da żądany efekt? A jeśli tak, to po ilu?

Rozwiązanie: Na początku pokażemy lemat:

Dane są ciągi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ oraz $b_1, b_2, \ldots, b_n$ które spełniają $a_i \geqslant b_i$ dla każdego $i \in \{1, 2, \ldots n\}$. Wówczas rozważając takie permutacje $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ oraz $b'_1, b'_2, \ldots b'_n$ ciągów $\langle a_i \rangle$ i $\langle b_i \rangle$, że $a'_1 \leqslant a'_2 \leqslant \ldots \leqslant a'_n$ oraz $b'_1 \leqslant b'_2 \leqslant \ldots \leqslant b'_n$ zachowana jest własność $a'_i \geqslant b'_i$ dla każdego $i \in \{1, 2, \ldots n\}$.

b'_i jest z definicji i-tą najmniejszą liczbą spośród $b_1, b_2, \ldots b_n$, czyli co najmniej $n - i + 1$ liczb b_j jest nie mniejszych niż b'_i, czyli mamy $a_j \geqslant b_j \geqslant b'_i$. Stąd w ciągu $\langle a_i \rangle$ co najmniej $n - i + 1$ liczb jest nie mniejszych niż b'_i, tym samym i-ta najmniejsza liczba wśród $a_1, a_2, \ldots a_n$ jest nie mniejsza niż b'_i, tym samym $a'_i \geqslant b'_i$.

Przejdźmy do rozwiązania zadania. Po uporządkowaniu kolumn w każdej kolumnie żołnierze stoją od najwyższego do najniższego. Rozważmy teraz dwa sąsiednie rzędy. Z lematu wynika, że po uporządkowaniu rzędów według wzrostu w każdym rzędzie żołnierz w lewej kolumnie jest nie niższy od żołnierza w prawej kolumnie. Skoro żadni dwaj żołnierze nie są tego samego wzrostu, to nierówność będzie ostra. Stosując lemat po kolei dla każdych dwóch rzędów widzimy, że zawsze wystarczą co najwyżej dwa uporządkowania.

3. Mamy trójkąt równoramienny ABC ($AC = BC$) oraz punkt M wewnątrz tego trójkąta, taki że $\sphericalangle BCM = 80°$, $\sphericalangle MCA = 20°$ oraz $\sphericalangle CAM = 10°$. Policz kąt $\sphericalangle AMB$.

Rozwiązanie: $\sphericalangle AMB = 130°$.

Sposób 1: Oczywiście mamy $\sphericalangle ACB = 100°$ oraz $\sphericalangle CAB = \sphericalangle ABC = 40°$. Niech M' oznacza punkt symetryczny do punktu M względem symetralnej odcinka AB. Wtedy mamy, że $\sphericalangle MCA = \sphericalangle BCM' = 20^\circ$, tym samym $\sphericalangle M'CM = 60^\circ$, oraz z symetrii $CM = CM'$, czyli trójkąt $MM'C$ jest równoboczny. Mamy ponadto $AM = BM'$ oraz $MM' \parallel AB$, czyli czworokąt $ABM'M$ jest trapezem równoramiennym. Przeliczając kąty mamy

$$\sphericalangle MM'B = 360^\circ - \sphericalangle MM'C - \sphericalangle CM'B = 150^\circ = 180^\circ - 20^\circ - 10^\circ - \sphericalangle CM'B$$

co w połączeniu z faktem, że $MM' = CM'$ daje nam przystawanie trójkątów $MM'B$ i $CM'B$ na mocy cechy przystawania bok-kąt-bok. Istotnie otrzymujemy, że $\sphericalangle MBM' = \sphericalangle M'BC = 10^\circ$, czyli $\sphericalangle MBA = 20^\circ$ oraz $\sphericalangle AMB = 180^\circ - 30^\circ - 20^\circ = 130^\circ$.

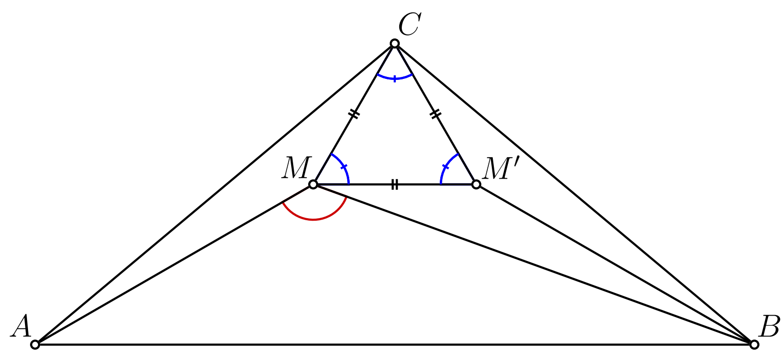
Sposób 2 (trygonometria): Z trygonometrycznej wersji twierdzenia Cevy mamy zależność

$$\frac{\sin \sphericalangle CAM}{\sin \sphericalangle MAB} \cdot \frac{\sin \sphericalangle ABM}{\sin \sphericalangle MBC} \cdot \frac{\sin \sphericalangle BCM}{\sin \sphericalangle MCA} = \frac{\sin 10^\circ}{\sin 30^\circ} \cdot \frac{\sin \sphericalangle ABM}{\sin(40^\circ - \sphericalangle ABM)} \cdot \frac{\sin \sphericalangle 80^\circ}{\sin \sphericalangle 20^\circ} = 1.$$

Ze wzorów $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$ i $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ otrzymujemy

$$\frac{\sin 10^\circ}{\sin 30^\circ} \cdot \frac{\sin 80^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{\sin 10^\circ}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\cos 10^\circ}{2\sin 10^\circ \cos 10^\circ} = 1 \Longrightarrow \frac{\sin \sphericalangle ABM}{\sin(40^\circ - \sphericalangle ABM)} = 1$$
$$\Longrightarrow \sphericalangle ABM = 40^\circ - \sphericalangle ABM \Longrightarrow \sphericalangle ABM = 20^\circ.$$

Wówczas mamy, że $\sphericalangle AMB = 180^\circ - 30^\circ - 20^\circ = 130^\circ$.



4. Dane są takie liczby całkowite dodatnie p, k i q, że $p > k$ oraz p jest dzielnikiem pierwszym liczby $q^2 + k$. Dowieść, że istnieją takie liczby całkowite dodatnie a, m i n, że $a < 2\sqrt{k}$ oraz

$$pa = m^2 + kn^2$$

Rozwiązanie:

Sposób 1: Niech $b = \left\lfloor \frac{\sqrt{p}}{\sqrt[4]{k}} \right\rfloor$. Wśród $b+1$ liczb $0, q, 2q, \ldots, bq$ rozważanych $\pmod p$ znajdą się dwie różniące się $\pmod p$ o nie więcej niż $\frac{p}{(b+1)}$. Rozważając ich różnicę uzyskujemy takie liczby n i m, że

$$1 \leqslant n \leqslant b < \frac{\sqrt{p}}{\sqrt[4]{k}}, \qquad nq \equiv \pm m \pmod p, \qquad 1 \leqslant m \leqslant \frac{p}{b+1} < \sqrt{p}\sqrt[4]{k}.$$

Wtedy

$$m^2 + kn^2 \equiv (nq)^2 + kn^2 \equiv 0 \pmod p \qquad \text{oraz} \qquad m^2 + kn^2 < p\sqrt{k} + p\sqrt{k} = 2p\sqrt{k}.$$

Sposób 2 (twierdzenie Minkowskiego): Rozważmy elipsę Γ o równaniu $x^2 + ky^2 < 2p\sqrt{k}$. Jest ona symetryczna względem punktu $(0, 0)$. Jej półosie mają długości $\sqrt{2p\sqrt{k}}$ oraz $\sqrt{\frac{2p}{\sqrt{k}}}$, stąd pole Γ jest równe

$$P_\Gamma = \pi\sqrt{2p\sqrt{k}}\sqrt{\frac{2p}{\sqrt{k}}} = 2p\pi > 4p$$

stąd z twierdzenia Minkowskiego wynika, że istnieje niezerowa para liczb całkowitych (x, y), która spełnia warunki

$$x^2 + ky^2 < 2p\sqrt{k}, \qquad x \equiv qy \pmod p.$$

Z powyższej kongruencji otrzymujemy wówczas z treści zadania zależność

$$x^2 + ky^2 \equiv q^2y^2 + ky^2 = (q^2 + k)y^2 \equiv 0 \pmod p.$$

Pozostaje zauważyć, że jeżeli $x = 0$, to mielibyśmy, że $qy \equiv 0 \pmod p$, ale nie może zachodzić $p \mid q$, ponieważ wtedy $p \mid k$, tym samym mielibyśmy, że $y = 0$, co przeczy faktowi, że para (x, y) jest niezerowa. Jeżeli jednak $y = 0$, to podobnie mielibyśmy, że $x \equiv 0 \pmod p$, co ponownie przeczy niezerowości pary (x, y). Ponieważ $p \mid x^2 + ky^2$, to liczba $a = \frac{x^2+ky^2}{p}$ jest całkowita dodatnia oraz mniejsza od $\frac{2p\sqrt{k}}{p} = 2\sqrt{k}$. Ostatecznie w ten sposób dobrana liczba a oraz liczby $m = |x|$ oraz $n = |y|$ spełniają warunki zadania.

Sesja III

Grupa Młodsza

1. Wyznacz wszystkie pary (x, y) liczb całkowitych spełniające równanie $xy + 1 = x + y$.

Rozwiązanie: Możemy przekształcić równoważnie równanie z treści zadania:

$$\begin{gathered} xy + 1 = x + y \\ xy - x - y + 1 = 0 \\ x(y-1) - (y-1) = 0 \\ (x-1)(y-1) = 0 \end{gathered}$$

Stąd $x = 1$ oraz y jest dowolną liczbą całkowitą, lub $y = 1$ oraz x jest dowolną liczbą całkowitą.

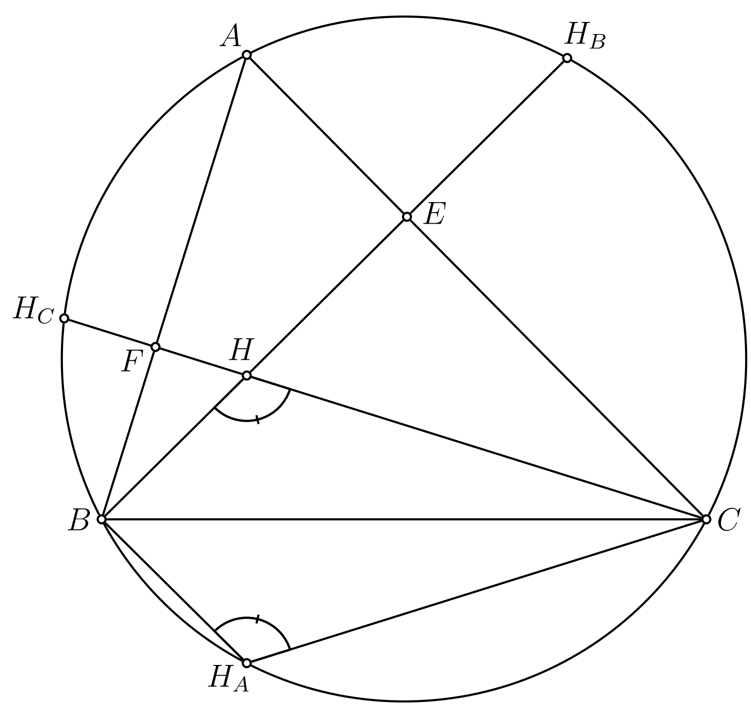
Odpowiedź: $(x, y) = (1, a),\ (a, 1),$ *dla* $a \in \mathbb{Z}$.

2. Punkt H jest punktem przecięcia wysokości trójkąta ostrokątnego ABC. Wykazać, że punkty symetryczne do punktu H względem prostych AB, BC, CA leżą na okręgu opisanym na trójkącie ABC.

Rozwiązanie: Niech H_A, H_B, H_C oznaczają odbicia punktu H względem prostych BC, AC i AB odpowiednio. Oznaczmy przez E, F spodki wysokości opuszczonych odpowiednio z punktów B, C w trójkącie ABC. Wtedy mamy równości

$$\sphericalangle BH_AC = \sphericalangle BHC = \sphericalangle EHF = 360^\circ - \sphericalangle BAC - \sphericalangle AFH - \sphericalangle HEA = 180^\circ - \sphericalangle BAC$$

z czego wynika, że punkty A, B, C i H_A leżą na jednym okręgu, czyli punkt H_A leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC. Analogicznie pokazujemy tezę dla punktów H_B i H_C.



3. Na każdym polu tablicy 5×7 stoi pionek. Czy możliwe jest takie ponowne ustawienie pionków, by każdy z nich zajmował samotnie pole sąsiadujące z zajmowanym pierwotnie? Pola nazywamy sąsiadującymi, jeśli mają dokładnie jeden bok wspólny.

Rozwiązanie: Pokolorujmy pola tablicy na czarno i biało tak, aby dwa pola sąsiadujące ze sobą bokiem były różnych kolorów. Widzimy, że pól jest w sumie 35, czyli pól jednego koloru będzie więcej niż drugiego. Załóżmy bez straty ogólności, że pól koloru białego będzie 18, a koloru czarnego 17. Wtedy widzimy, że każdy spośród 18 pionków, który stał na polu koloru białego, będziemy musieli ustawić na polu koloru czarnego, co jest niemożliwe, gdyż pionków tych jest więcej niż pól koloru czarnego.

4. Wybrano 51 różnych liczb naturalnych mniejszych od 100. Udowodnić, że istnieją wśród nich takie dwie liczby, że pierwsza dzieli drugą.

Rozwiązanie: Daną liczbę naturalną n przedstawmy w postaci $n = 2^\alpha \cdot m$, gdzie m jest liczbą nieparzystą, a α - liczbą całkowitą nieujemną. Liczb nieparzystych dodatnich mniejszych od 100 jest 50, tym samym skoro wybraliśmy 51 liczb to otrzymujemy, że dwie wybrane liczby będą w takim zapisie tę samą liczbę nieparzystą n. Zapiszmy te liczby jako $a = 2^k \cdot m$ oraz $b = 2^l \cdot m$. Wtedy bez straty ogólności zakładając, że $a > b$ mamy, że $k > l$, tym samym

$$\frac{a}{b} = \frac{2^k \cdot m}{2^l \cdot m} = 2^{k-l} \in \mathbb{Z}$$

z czego wynika, że $b \mid a$.

5. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x^2 = 2y - 1 \\ y^2 = 2x - 1 \end{cases}$$

Rozwiązanie: Dodajmy stronami te równania:

$$\begin{gathered} x^2 + y^2 = (2y-1) + (2x-1) \\ (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) = 0 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 = 0 \end{gathered}$$

Ponieważ liczby $(x-1)^2$ oraz $(y-1)^2$ są nieujemne, to $(x-1)^2 = (y-1)^2 = 0$, czyli $x = y = 1$. Możemy sprawdzić, że para $(x, y) = (1, 1)$ spełnia układ równań: $1^2 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$.

Odpowiedź: $(x, y) = (1, 1)$.

Grupa Starsza

1. Liczby rzeczywiste a, b spełniają równość $\left(a + \sqrt{a^2+1}\right) \cdot \left(b + \sqrt{b^2+1}\right) = 1$. Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości sumy $a + b$.

Rozwiązanie: Możemy zauważyć, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi $x + \sqrt{x^2+1} > x + \sqrt{x^2} = x + |x| \geqslant 0$. Stąd

$$a + \sqrt{a^2+1} = \frac{1}{b + \sqrt{b^2+1}} = \frac{b - \sqrt{b^2+1}}{\left(b + \sqrt{b^2+1}\right)\left(b - \sqrt{b^2+1}\right)} = \frac{b - \sqrt{b^2+1}}{b^2 - (b^2+1)} = -b + \sqrt{b^2+1}$$

Analogicznie pokazujemy, że $b + \sqrt{b^2+1} = -a + \sqrt{a^2+1}$. Wówczas

$$\left(a + \sqrt{a^2+1}\right) - \left(-a + \sqrt{a^2+1}\right) = \left(-b + \sqrt{b^2+1}\right) - \left(b + \sqrt{b^2+1}\right)$$

Skąd $2a = -2b$, czyli $a + b = 0$.

Odpowiedź: $a + b = 0$.

2. Rozwiązać równanie

$$x^{x+y} = (x+y)^y$$

w liczbach całkowitych dodatnich.

Rozwiązanie: Niech $d = NWD(x, y)$ oraz $x = ad$ i $y = bd$. Podstawiając te wartości do równania z treści zadania otrzymujemy

$$\begin{aligned} (ad)^{ad+bd} &= (ad+bd)^{bd} \\ a^{ad+bd} \cdot d^{ad} \cdot d^{bd} &= (a+b)^{bd} \cdot d^{bd} \\ a^{ad+bd} \cdot d^{ad} &= (a+b)^{bd} \end{aligned}$$

Możemy zauważyć, że $NWD(a, a+b) = NWD(a, b) = 1$, więc liczby a^{ad+bd} oraz $(a+b)^{bd}$ nie mają wspólnych dzielników pierwszych. Zatem aby zachodziła równość w powyższym równaniu, to $a = 1$. Widzimy, że wtedy

$$d^d = (b+1)^{bd} = \left((b+1)^b\right)^d$$

więc $d = (b+1)^b$. Stąd $x = n^{n-1}$ oraz $y = (n-1) \cdot n^{n-1}$. Wystarczy sprawdzić, czy ta para spełnia równanie z treści zadania:

$$\begin{aligned} x^{x+y} &= \left(n^{n-1}\right)^{n^{n-1}+(n-1)n^{n-1}} = n^{(n-1)\cdot n \cdot n^{n-1}} = n^{(n-1)n^n} \\ (x+y)^y &= \left(n^{n-1} + (n-1)n^{n-1}\right)^{(n-1)n^{n-1}} = n^{n\cdot(n-1)n^{n-1}} = n^{(n-1)n^n} \end{aligned}$$

Odpowiedź: $(x, y) = (n^{n-1}, (n-1)n^{n-1})$, *dla* $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 2}$.

3. Rozważmy grę jednoosobową na nieskończonej szachownicy opartą na następującej regule. Jeżeli na dwóch polach mających wspólny bok stoją piony i następne pole jest puste (trzy omawiane pola leżą na jednej linii poziomej lub pionowej), to możemy te piony usunąć i postawić jeden pion na trzecim z tych pól (które było puste). Udowodnić, że jeżeli w pozycji początkowej piony wypełniają prostokąt o liczbie pól podzielnej przez 3, to nie możemy otrzymać pozycji, w której na szachownicy jest tylko jeden pion.

Rozwiązanie: Bez straty ogólności załóżmy, że wiersze mają liczbę pól podzielną przez 3. Kolejne wiersze oznaczmy przez R_1, R_2, …, R_n. Dla $i \equiv 1 \pmod 3$ oznaczamy pola wiersza R_i po kolei danym wzorem zaczynając od

$$(0,1), \qquad (1,0), \qquad (1,1)$$

dla $i \equiv 2 \pmod 3$ zaczynamy od

$$(1,0), \qquad (1,1), \qquad (0,1)$$

oraz dla $i \equiv 0 \pmod 3$ zaczynamy od

$$(1,1), \qquad (0,1), \qquad (1,0).$$

Przypisując w taki sposób dwie współrzędne każdemu polu tablicy otrzymujemy, że gdy usuwamy dwa piony, to biorąc dla danych pól sumę współrzędnych ich przypisanym pól a współrzędne nowo postawionego pola widzimy, że suma $\pmod 2$ się nie zmieni. Zauważmy następnie, że suma wszystkich pól $\pmod 2$ jest równa $(0,0)$, ale jeżeli zostanie tylko jedno pole, to co najmniej jedna współrzędna będzie różna od $0 \pmod 2$.

4. W czworokącie cyklicznym $ABCD$ (środek O) mamy $AC \perp BD$, a M, N, P, Q to środki boków AB, BC, CD, DA oraz M', N', P', Q' to rzuty M, N, P, Q na przeciwległe boki. Niech $S = AC \cap BD$. Udowodnić, że środek OS to środek okręgu opisanego na $M'N'P'Q$.

Rozwiązanie: Rozwiązanie podzielimy na dwie części: pokazanie, że proste MM', NN', PP' i QQ' przechodzą przez punkt S, oraz pokazanie, że środek odcinka OS jest środkiem okręgu opisanego na czworokącie $M'N'P'Q'$.

Część I, sposób I: Przenosząc kąty mamy

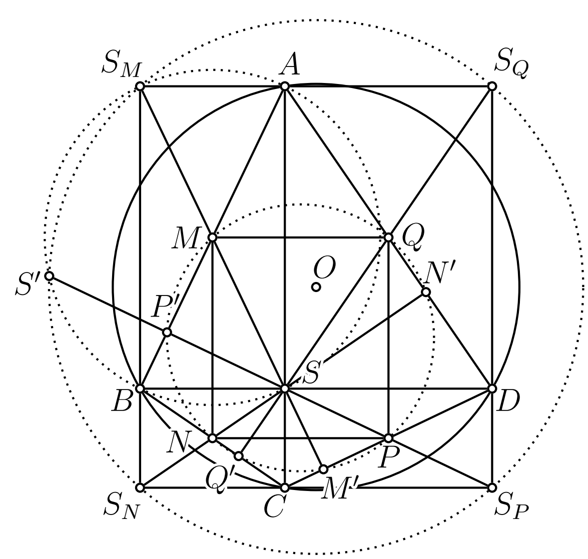
$$\sphericalangle P'SA = 90^\circ - \sphericalangle P'AS = 90^\circ - \sphericalangle BAC = 90^\circ - \sphericalangle BDC = \sphericalangle SCP$$

ale skoro mamy $\sphericalangle CSD = 90^\circ$, to trójkąt PSC jest równoramienny, tym samym $\sphericalangle P'SA = \sphericalangle SCP = \sphericalangle CSP$, stąd punkty P, S, P' leżą na jednej prostej. W sposób analogiczny pokazujemy, że proste MM', NN' i QQ' przechodzą przez punkt S.

Część I, sposób II (Dwustosunek): Rzutując dwustosunek $(C, D; P, X_\infty) = -1$ przez punkt S na okrąg opisany na trójkącie ABS otrzymujemy dwustosunek

$$(C, D; P, X_\infty) \overset{S}{\mapsto} (A, B; S', S) = -1.$$

Punkt X_∞ przechodzi na punkt S, ponieważ prosta styczna do okręgu opisanego na trójkącie ABS w punkcie S jest antyrównoległą prostej AB w kącie $\sphericalangle ASB$, czyli jest równoległa do prostej CD. Wynika z tego, że skoro $\sphericalangle ASB = 90^\circ$, to punkt S' jest obrazem S w symetrii względem prostej AB, tym samym proste PS i AB są prostopadłe, czyli P' leży na prostej PS. W sposób analogiczny pokazujemy, że proste MM', NN' i QQ' przechodzą przez punkt S.



Część II: Skoro $\sphericalangle MP'P = \sphericalangle MM'P = 90^\circ$, to punkty M, M', P, P' leżą na jednym okręgu. Postępując analogicznie dla pozostałych punktów otrzymujemy z potęgi punktu S zależności

$$SM \cdot SM' = SN \cdot SN' = SP \cdot SP' = SQ \cdot SQ'$$

czyli punkty M', N', P', Q' leżą na okręgu opisanym na czworokącie $MNPQ$. Pozostaje w takim razie pokazać, że środek okręgu opisanego na czworokącie $MNPQ$ jest środkiem odcinka OS. Niech S_M, S_N, S_P, S_Q oznaczają odbicia punktu S względem odpowiednio punktów M, N, P, Q. Wtedy widzimy, że mamy $MN \parallel AC$, $NP \parallel BD$, $PQ \parallel AC$, $QM \parallel BD$, czyli czworokąt $S_MS_NS_PS_Q$ jest prostokątem. Ponadto czworokąty $ASBS_M$, $BSCS_N$, $CSDS_P$ oraz $DSAS_Q$ także są prostokątami, czyli punkty A, B, C, D leżą na bokach prostokąta $S_MS_NS_PS_Q$, z czego tym samym wynika, że symetralne odcinków S_MS_N i AC, S_NS_P i BD się pokrywają. Otrzymujemy z tego, że punkt O jest środkiem okręgu opisanego na czworokącie $S_MS_NS_PS_Q$, czyli z jednokładności o środku w punkcie S i o skali 2 otrzymujemy, że środek okręgu opisanego na prostokącie $MNPQ$ jest środkiem odcinka OS.

Sesja IV

Grupa Młodsza

1. Wykazać, że liczba $2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{99}$ jest podzielna przez 7.

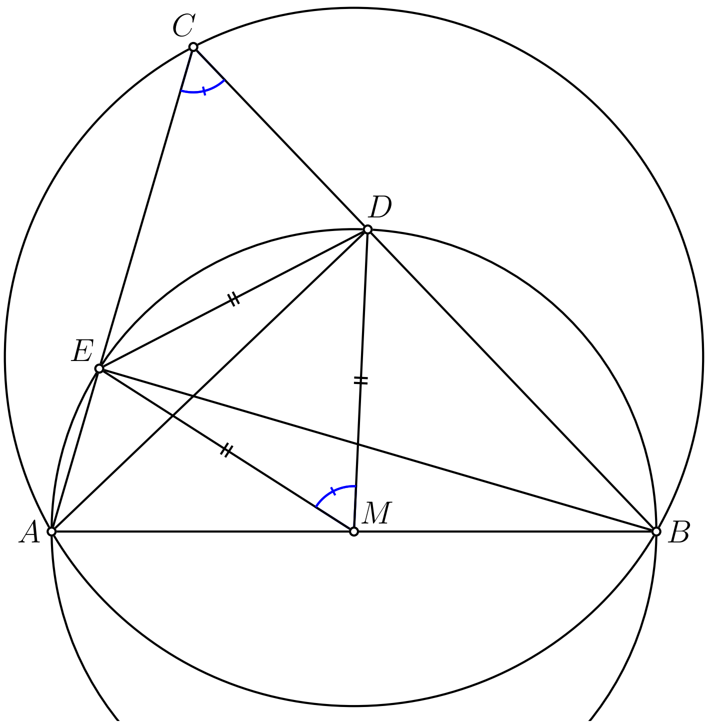
Rozwiązanie: Zauważmy, że zachodzi równość

$$2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{99} = 2^{100} - 2.$$

Na mocy małego twierdzenia Fermata otrzymujemy, że skoro liczba 7 jest pierwsza, to $2^{100} \equiv 2^{96} \cdot 2^4 \equiv 2 \pmod 7$, stąd $2^{100} - 2 \equiv 0 \pmod 7$.

2. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, przy czym $\sphericalangle ACB = 60°$. Punkty D i E są rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów A i B na proste BC i AC. Punkt M jest środkiem boku AB. Wykazać, że trójkąt DEM jest równoboczny.

Rozwiązanie: Mamy, że $\sphericalangle ADB = \sphericalangle AEB = 90°$, stąd punkty A, B, D, E leżą na okręgu o średnicy AB. Wówczas skoro M jest środkiem odcinka AB, to mamy $MD = ME$. Pozostaje zauważyć, że z twierdzenia o kącie środkowym i wpisanym mamy, że $\sphericalangle DME = 2\sphericalangle DBE = 2(90° - \sphericalangle ACB) = 60°$, czyli trójkąt równoramienny DEM jest równoboczny.



3. Wyznacz wszystkie pary (x, y) liczb całkowitych spełniające równanie $2xy + 3x + y = -1$.

Rozwiązanie: Mnożąc obie strony równania przez 2 oraz dodając 3 do obu stron równania mamy

$$4xy + 6x + 2y + 3 = 1$$
$$(2x + 1)(2y + 3) = 1.$$

Skoro x, y są całkowite, to mamy dwa przypadki:

1. $2x+1 = 2y+3 = 1$ - wtedy mamy $x = 0$ oraz $y = -1$.
2. $2x+1 = 2y+3 = -1$ - wtedy mamy $x = -1$ oraz $y = -2$.

Odpowiedź: $(x, y) = (0, -1), (-1, -2)$.

4. Czy tablicę o wymiarach 10×10 można pokryć kostkami tetramino L?

Rozwiązanie: Pokolorujmy tablicę czterema kolorami A, B, C, D tak, aby w wierszach nieparzystych powstał wzór $A, B, A, B, \ldots$, a w wierszach parzystych wzór $C, D, C, D, \ldots$. Wtedy każdy klocek tetramino L pokrywa:

1. 2 klocki A, 1 klocek B, 1 klocek C - oznaczmy liczbę tych tetramin przez k,
2. 2 klocki D, 1 klocek B, 1 klocek C - oznaczmy liczbę tych tetramin przez l,
3. 2 klocki B, 1 klocek A, 1 klocek D - oznaczmy liczbę tych tetramin przez m,
4. 2 klocki C, 1 klocek A, 1 klocek D - oznaczmy liczbę tych tetramin przez n.

Skoro tablica ma 25 pól każdego koloru, to otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} 2k + m + n = 25 \\ 2l + m + n = 25 \\ 2m + k + l = 25 \\ 2n + k + l = 25 \end{cases}$$

Pierwsze dwa równania dają nam $k = l$, a trzecie i czwarte równanie daje nam $m = n$. Oznaczałoby to, że liczba tetramin byłaby równa $k + l + m + n = 2(k + m)$, czyli byłaby parzysta. Ale tablica 10×10 ma 100 pól, a skoro każde tetramino zajmuje 4 pola, to potrzeba dokładnie $\frac{100}{4} = 25$ tetramin, co jest liczbą nieparzystą. Otrzymujemy w ten sposób, że tablicy 10×10 nie da się pokryć klockami tetramino L.

Grupa Starsza

1. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie n, dla których liczba $n^{n^3} - n^n$ nie jest podzielna przez 5.

Rozwiązanie: Oczywiście $5 \nmid n$. Zauważmy, że gdy $n \equiv 1 \pmod 5$, to mamy

$$n^{n^3} - n^n \equiv 1^{n^3} - 1^n \equiv 0 \pmod 5.$$

Kiedy $n \equiv 4 \equiv -1 \pmod 5$, to

$$n^{n^3} - n^n \equiv (-1)^{n^3} - (-1)^n \equiv 0 \pmod 5$$

ponieważ liczby n^3 oraz n mają tę samą parzystość. Pozostaje rozważyć przypadki, w których $n \equiv 2 \pmod 5$ oraz $n \equiv 3 \equiv -2 \pmod 5$. Skoro $5 \nmid n$, to możemy mnożyć przez odwrotność liczby $n \pmod 5$, tym samym przekształcając warunek podzielności przez 5 w warunek

$$n^{n^3} \equiv n^n \pmod 5 \iff n^{n^3 - n} \equiv 1 \pmod 5.$$

Widzimy jednocześnie, że najmniejszą liczbą całkowitą dodatnią k, że $2^k \equiv 1 \pmod 5$, jest $k = 4$, oraz tym samym najmniejszą taką liczbą całkowitą dodatnią k, że $3^k \equiv 1 \pmod 5$ także jest $k = 4$. Stąd powyższe przystawanie równoważne jest warunkowi $n^3 \equiv n \pmod 4$. Przystawanie to nie zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $n \equiv 2 \pmod 4$. Stąd aby wyrażenie z treści zadania nie było podzielne przez 5, to muszą zachodzić warunki

$$n \equiv 2 \pmod 5, \quad n \equiv 2 \pmod 4 \qquad \text{lub} \qquad n \equiv 3 \pmod 5, \quad n \equiv 2 \pmod 4.$$

Łącząc te warunki otrzymujemy, że wyrażenie z treści nie jest podzielne przez 5 wtedy i tylko wtedy, gdy $n \equiv \pm 2 \pmod{20}$.

2. Trójkąt równoboczny ABC wpisano w okrąg o. Okrąg q jest styczny zewnętrznie do okręgu o w punkcie należącym do krótszego łuku BC. Z punktów A, B, C poprowadzono styczne do okręgu q odpowiednio w punktach D, E, F. Udowodnić, że $AD = BE + CF$.

Rozwiązanie:

Sposób I: Ponieważ punkty A, B, C leżą na okręgu o oraz okrąg q jest styczny do o, to z twierdzenia Casey'a dla okręgu q i okręgów zdegenerowanych do punktów A, B, C otrzymujemy równość $AB \cdot CF + CA \cdot BE = BC \cdot AD$. Ponieważ $AB = BC = CA$, to $AD = BE + CF$, co kończy dowód.

Sposób II: Lemat: Niech P będzie punktem na krótszym łuku BC okręgu o. Wówczas $AP = BP + CP$.

Dowód: Z twierdzenia Ptolemeusza dla czworokąta $ABDC$ mamy $AB \cdot CP + CA \cdot BP = BC \cdot AP$, a ponieważ $AB = BC = CA$, to $AP = BP + CP$.

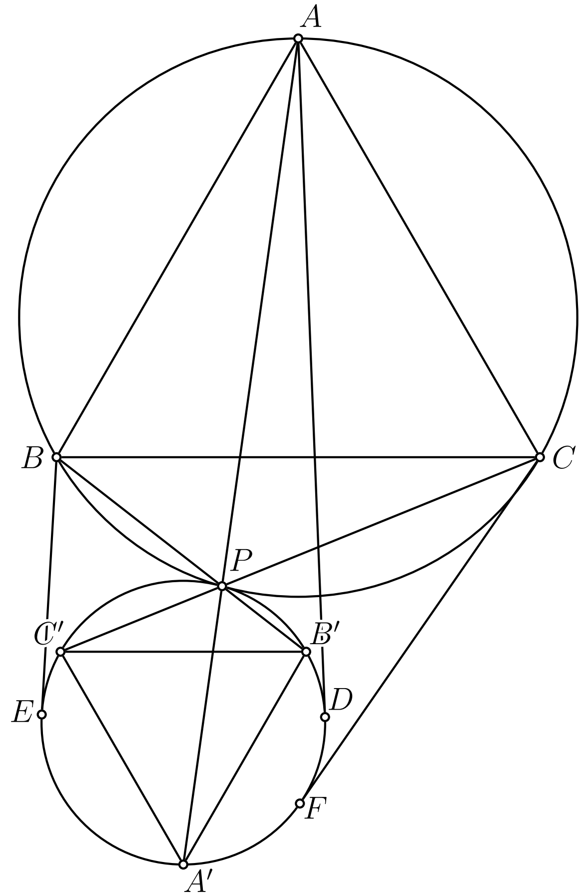
Przejdźmy do rozwiązania zadania. Niech P będzie punktem styczności okręgów o i q. Rozważmy jednokładność $\mathcal{J}$ o środku P przekształcającą okrąg o na q. Wówczas skala k tej jednokładności jest ujemna. Niech $\ell = -k$, $A' = \mathcal{J}(A)$, $B' = \mathcal{J}(B)$ oraz $C' = \mathcal{J}(C)$. Z twierdzenia o stycznej i siecznej mamy

$$AD^2 = AP \cdot AA' = AP(AP + A'P) = AP(AP + \ell \cdot AP) = AP^2(1 + \ell)$$

czyli $AD = AP \cdot \sqrt{1+\ell}$. Analogicznie pokazujemy, że $BE = BP \cdot \sqrt{1+\ell}$ oraz $CF = CP \cdot \sqrt{1+\ell}$. Korzystając z lematu dostajemy

$$AD = AP \cdot \sqrt{1+\ell} = (BP + CP) \cdot \sqrt{1+\ell} = BP \cdot \sqrt{1+\ell} + CP \cdot \sqrt{1+\ell} = BE + CF$$

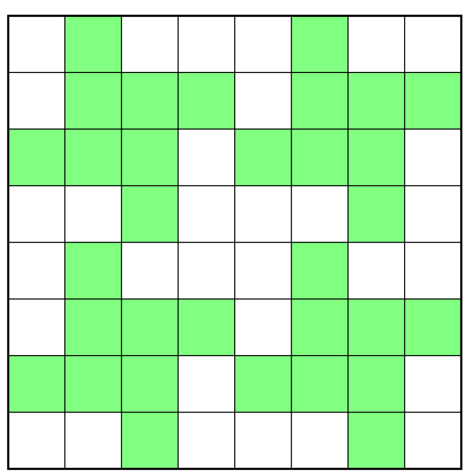
co kończy dowód.



3. Rozważmy tetramino powstałe poprzez złączenie dwóch płytek 2×1 wzdłuż ich dłuższych boków (tak, że środek dłuższego boku pierwszej kostki jest rogiem drugiej kostki). W ten sposób możemy otrzymać dwa rodzaje kostek tetramino o przeciwnej orientacji. Nazwijmy je S-tetramino i Z-tetramino. Załóżmy, że figurę (kratową) P można pokryć kostkami S-tetramino. Udowodnić, że jeśli pokryjemy P przy pomocy kostek S-tetramino i Z-tetramino, to zawsze użyjemy parzystą liczbę kostek Z-tetramino.

Rozwiązanie:

Sposób 1: Rozważmy nieskończone kolorowanie tablicy w sposób pokazany na poniższym rysunku:



Widzimy, że każda kostka Z-tetramino pokrywa nieparzystą liczbę pól zielonych, a S-tetramino - parzystą liczbę pól zielonych. Wynika z tego, że figura P ma parzystą liczbę pól zielonych, tym samym kostek Z-tetramino musi być parzyście wiele.

Sposób 2: Każdemu polu nieskończonej tablicy przypisujemy liczby tak, jak na rysunku poniżej:

$\vdots$					
81	$\vdots$				
-27	-81	$\vdots$			
9	27	81	$\cdots$		
-3	-9	-27	-81	$\cdots$	
1	3	9	27	81	$\cdots$

lewemu dolnemu rogowi przypisujemy liczbę 1. Pola nad i po prawo od 1 mają liczby $3, -3$. Pola nad i po prawo od $3, -3$ mają 9 lub -9. Kontynuujemy ten wzór tak, aby w każdym polu była całkowita nieujemna potęga trójki, oraz aby w nieparzystych wierszach wszystkie liczby były dodatnie, a w parzystych wszystkie ujemne. Mamy dwa rodzaje klocków S-tetramino (w zależności od obrotu). Suma liczb wpisanych w pierwszy rodzaj jest równa

$$3^i \cdot (3^j) \cdot \Big(1 + 3 + 3 \cdot (-3) + 3^2 \cdot (-3)\Big) = -32 \cdot 3^i \cdot (-3)^j$$

a w drugi jest równa

$$3^i \cdot (-3)^j \cdot \Big(3 + 3 \cdot (-3) + (-3) + (-3)^2\Big) = 0.$$

W obu przypadkach jest to liczba podzielna przez 32. Podobnie suma liczb pokrytych przez drugi rodzaj klocka Z-tetramino jest równa

$$3^i \cdot (-3)^j \cdot \Big(1 + (-3) + 3 \cdot (-3) + 3 \cdot (-3)^2\Big) = 16 \cdot 3^i \cdot (-3)^j$$

oraz przez pierwszy rodzaj jest równa

$$3^i \cdot (-3)^j \cdot \Big(3 + 3^2 + (-3) + 3 \cdot (-3)\Big) = 0.$$

Aby figura kratowa mogła być pokryta przez klocki S-tetramino, to suma liczb wewnątrz niej musiałaby być podzielna przez 32, czyli potrzebna by była parzysta liczba klocków Z-tetramino drugiego rodzaju. Obracając figurę o $90°$ oraz postępując analogicznie widzimy, że potrzebna jest także parzysta liczba klocków Z-tetramino pierwszego rodzaju.

Sesja V

Grupa Młodsza

1. Liczby naturalne a i b spełniają równość $56a = 65b$. Uzasadnij, że liczba $a + b$ jest złożona.

Rozwiązanie: Możemy zapisać

$$a + b = \frac{1}{56} \cdot (56a + 56b) = \frac{1}{56} \cdot 121b = \frac{1}{56} \cdot 11^2 \cdot b$$

a skoro $11 \nmid 56$, to skoro powyższe wyrażenie jest całkowite otrzymujemy, że $11^2 \mid a + b$.

2. Wiadomo, że $\frac{3a}{3a+b} = \frac{2}{5}$. Oblicz $\frac{b}{3a+b}$.

Rozwiązanie: Zauważmy, że

$$\frac{3a}{3a+b} + \frac{b}{3a+b} = \frac{3a+b}{3a+b} = 1 \Longrightarrow \frac{b}{3a+b} = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}.$$

3. Każdy punkt koła domkniętego o promieniu 1 pomalowano na jeden z trzech kolorów. Dowieść, że istnieją dwa punkty tego samego koloru, których odległość wynosi 1.

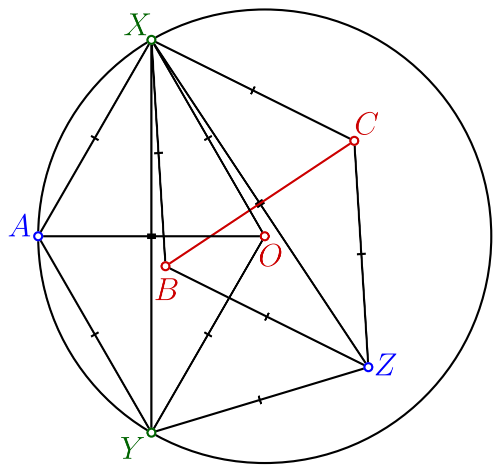
Rozwiązanie: Niech O oznacza środek okręgu o promieniu 1. Powiedzmy, że jest on koloru czerwonego. Rozważmy takie punkty X, A, Y leżące w tej kolejności na okręgu, że $AX = AY = 1$. Wtedy punkty X, A, Y są koloru różnego od czerwonego. Ponadto punkty A, X oraz A, Y są różnych kolorów, tym samym punkty X, Y są tego samego koloru, powiedzmy zielonego, a punkt A niech będzie pokolorowany na niebiesko. Rozważmy następnie taki punkt Z, że trójkąt XYZ jest równoramienny, przy czym $XY = XZ$, oraz że $YZ = 1$. Ponadto niech B, C będą takimi punktami na płaszczyźnie, że $XB = XC = ZB = ZC = 1$. Wtedy mamy trzy możliwości pokolorowania punktu Z:

1. Z jest koloru czerwonego - wtedy skoro X, Z są odpowiednio pokolorowane na zielono i czerwono, to punkty B, C oba będą niebieskie. Jednocześnie widzimy, że trójkąty XBC i ZBC są równoboczne, czyli $BC = 1$.

2. Z jest koloru niebieskiego - przypadek w pełni analogiczny do poprzedniego - B i C oba będą koloru czerwonego.

3. Z jest koloru zielonego - wtedy Y, Z są tego samego koloru oraz $YZ = 1$.

W każdym z trzech przypadków otrzymujemy odcinek o długości 1 łączący dwa punkty tego samego koloru.



4. Punkt P leży wewnątrz równoległoboku $ABCD$, przy czym $\sphericalangle ABP = \sphericalangle ADP$. Dowieść, że

$$\sphericalangle DAP = \sphericalangle DCP.$$

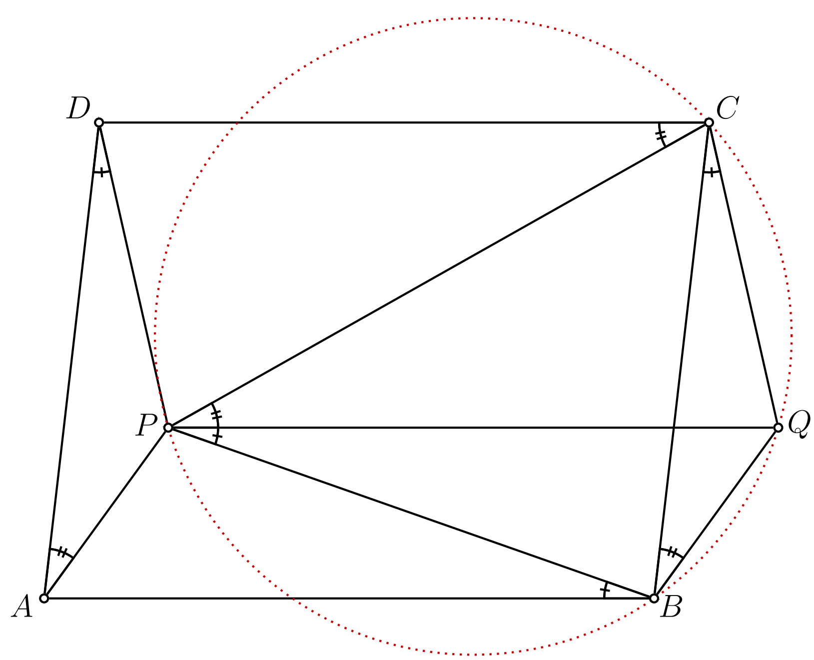
Rozwiązanie:

Sposób 1: Niech Q oznacza obraz punktu P w translacji o wektor $\overrightarrow{AB}$. Widzimy, że obrazem punktów A, D w tej translacji są odpowiednio punkty B, C. Mamy wtedy z równoległości równości kątów

$$\sphericalangle QPB = \sphericalangle ABP = \sphericalangle ADP = \sphericalangle BCQ$$

czyli na czworokącie $BPCQ$ można opisać okrąg. Łącząc to z równoległościami odpowiednich prostych uzyskujemy równości

$$\sphericalangle DAP = \sphericalangle CBQ = \sphericalangle CPQ = \sphericalangle DCP.$$



Sposób 2 (moving points): Rozważmy mapę rzutową

$$\Phi : BP \mapsto B'P' \mapsto DP'' \mapsto DP$$

gdzie kolejne przekształcenia to: obrót względem punktu A o kąt $\sphericalangle BAD$; jednokładność o środku w punkcie A i o skali $\frac{AD}{AB}$; symetria względem prostej AD. Przekształcenie to przenosi proste z pęku prostych przez punkt B na proste z pęku prostych przez punkt D, jednocześnie zachowując warunek $\sphericalangle ABP = \sphericalangle ADP$. Ponadto z twierdzenia Steinera otrzymujemy, że skoro $\Phi(BD) \neq BD$, to punkt P rusza się po krzywej stożkowej przechodzącej przez punkty B, D. Mamy ponadto, że

$$\Phi(AB) : AB \mapsto AD \mapsto AD \mapsto AD, \quad AB \cap AD = A$$

z czego wynika, że $A \in \Gamma$. Podobnie możemy zauważyć, że

$$\Phi(BC) : BC \mapsto B'C' \mapsto DC \mapsto DC, \quad BC \cap DC = C$$

stąd także mamy $C \in \Gamma$. Rozważmy następnie mapę rzutową

$$\Psi : AQ \mapsto A'Q' \mapsto CQ'' \mapsto CQ$$

gdzie kolejne przekształcenia to: obrót względem punktu D o kąt $\sphericalangle ADC$; jednokładność o środku w punkcie D i o skali $\frac{CD}{AD}$; symetria względem prostej CD. Przekształcenie to przenosi proste z pęku prostych przez punkt A na proste z pęku prostych przez punkt C, jednocześnie zachowując warunek $\sphericalangle DAQ = \sphericalangle DCQ$. Ponadto z twierdzenia Steinera otrzymujemy, że skoro $\Psi(AC) \neq AC$, to punkt Q rusza się po krzywej stożkowej Ω przechodzącej przez punkty A, C. Mamy także

$$\Psi(AD) : AD \mapsto CD \mapsto CD \mapsto CD, \quad AD \cap CD = D$$

stąd $D \in \Omega$. Podobnie mamy

$$\Psi(AB) : AB \mapsto A'B' \mapsto BC \mapsto BC, \quad AB \cap BC = B$$

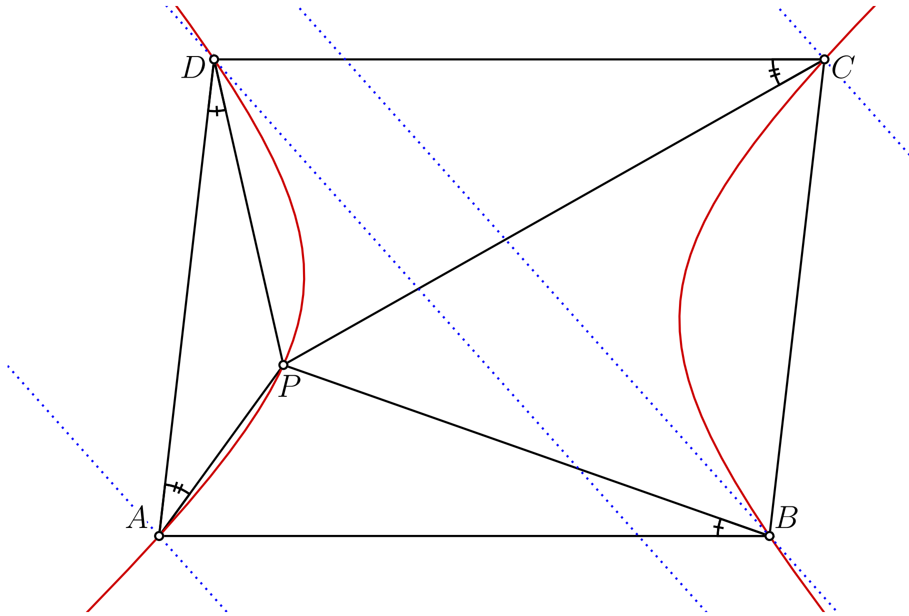
czyli także mamy $B \in \Omega$. Widzimy, że teza równoważna jest pokazaniu, że $\Gamma = \Omega$, a skoro obie te stożkowe przechodzą przez A, B, C, D, to wystarczy znaleźć piąty punkt, przez który obie będą przechodzić. Rozważmy wówczas punkt w nieskończoności X_∞ na dwusiecznej wewnętrznej kąta $\sphericalangle ABC$. Skoro $ABCD$ jest równoległobokiem, to punkt ten również leży na dwusiecznej wewnętrznej kąta $\sphericalangle ADC$. Istotnie otrzymujemy zależność

$$\Phi(BX_\infty) : BX_\infty \mapsto B'X'_\infty \mapsto DX'_\infty \mapsto DX_\infty, \quad BX_\infty \cap DX_\infty = X_\infty$$

przy czym X'_∞ to punkt w nieskończoności na prostej symetrycznej do dwusiecznej wewnętrznej kąta $\sphericalangle ADC$ względem prostej AD. Otrzymujemy w ten sposób, że $X_\infty \in \Gamma$. Zauważmy następnie, że skoro $ABCD$ jest równoległobokiem, to punkt X_∞ leży również na dwusiecznych zewnętrznych kątów $\sphericalangle BAD$ oraz $\sphericalangle DCB$. Istotnie mamy

$$\Psi(AX_\infty) : AX_\infty \mapsto A'X'_\infty \mapsto CX'_\infty \mapsto CX_\infty, \quad AX_\infty \cap CX_\infty = X_\infty$$

stąd $X_\infty \in \Omega$. Ostatecznie skoro krzywe stożkowe Γ i Ω mają 5 punktów wspólnych, to są one tą samą stożkową.



Grupa Starsza

1. W kolejce do kina stoi n osób (przy czym kolejność osób w kolejce nigdy się nie zmienia). Osoby te są wpuszczane do kina w k grupach, z których każda składa się z jednej lub więcej osób. Na ile sposobów można utworzyć tych k grup?

Rozwiązanie: Zauważmy, że aby utworzyć k niepustych grup, to musimy wybrać $k-1$ miejsc, w których wstawimy przerwę pomiędzy osobami:

$$1 \mid 2 \mid 3 \mid \ldots \mid n.$$

Między kolejnymi osobami jest $n-1$ przerw, czyli liczba sposobów wynosi $\binom{n-1}{k-1}$.

2. Liczby p oraz $p+2$ są pierwsze. Dowieść, że istnieje ciąg kolejnych liczb całkowitych (więcej niż jednej), których iloczyn przy dzieleniu przez $p(p+2)$ daje resztę p^2+p-1.

Rozwiązanie: Zauważmy, że reszta $p^2+p-1 \pmod{p(p+2)}$ jest równoważna jednoczesnemu spełnieniu kongruencji

$$p^2+p-1 \equiv -1 \pmod{p}, \qquad p^2+p-1 \equiv 1 \pmod{p+2}.$$

Zauważmy, że z twierdzenia Wilsona mamy zależności

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (p-1) \equiv -1 \pmod{p}$$

oraz

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot p \equiv p! \equiv \frac{(p+1)!}{(p+1)} \equiv \frac{-1}{-1} \equiv 1 \pmod{p+2}.$$

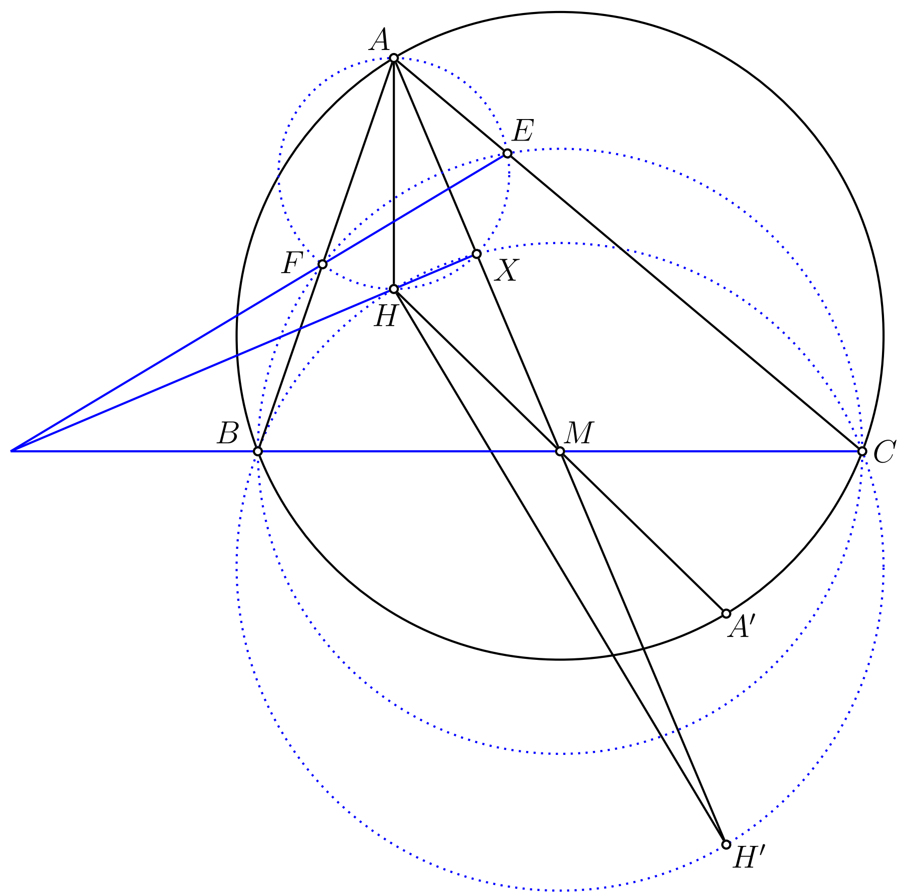
Rozważmy wówczas taką liczbę całkowitą dodatnią a, że $a \equiv 1 \pmod{p}$ oraz $a \equiv 2 \pmod{p+2}$. Wtedy rozważając ciąg $p-1$ kolejnych liczb całkowitych dodatnich $a, a+1, a+2, \ldots a+p-2$ otrzymujemy przystawania

$$a(a+1)(a+2)\ldots(a+p-2) \equiv (p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$$
$$a(a+1)(a+2)\ldots(a+p-2) \equiv p! \equiv 1 \pmod{p+2}.$$

3. Niech H to ortocentrum trójkąta ABC, a M to środek BC. Niech X będzie punktem przecięcia odcinka AM z okręgiem opisanym na trójkącie BCH. Niech ponadto E i F będą spodkami wysokości w ABC poprowadzonymi odpowiednio z punktów B i C. Udowodnić, że BC, HX i EF przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie:

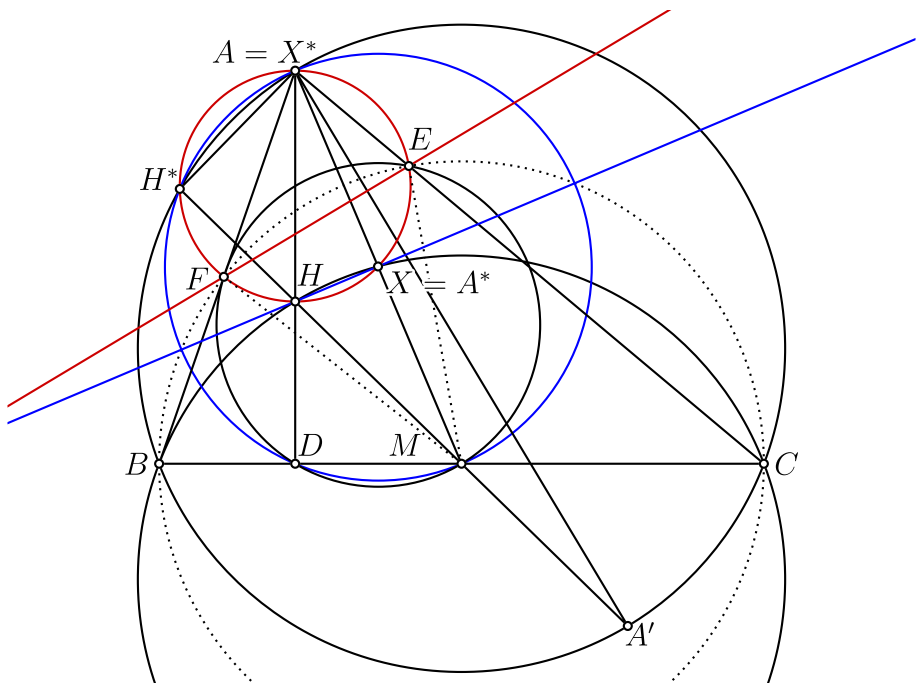
Sposób 1: Oznaczmy przez A' odbicie punktu H względem punktu M. Jest to antypoda punktu A w okręgu opisanym na trójkącie ABC. Niech H' będzie przecięciem prostej AM z okręgiem opisanym na trójkącie BCH, różnym od punktu X. Wtedy z symetrii względem punktu M wynika, że skoro odcinek AA' jest średnicą okręgu opisanego na trójkącie ABC, to odcinek HH' jest średnicą okręgu opisanego na trójkącie BCH, tym samym $\sphericalangle HXH' = 90°$. Wynika z tego, że mamy $\sphericalangle HXA = \sphericalangle HEA = \sphericalangle HFA = 90°$, czyli punkty A, H, X, E, F leżą na jednym okręgu. Ponadto skoro $\sphericalangle BEC = \sphericalangle BFC = 90°$, to punkty B, C, E, F leżą na jednym okręgu o średnicy BC. Ostatecznie z twierdzenia o trzech osiach potęgowych dla okręgu o średnicy BC, okręgu o średnicy AH oraz okręgu opisanym na trójkącie BCH otrzymujemy, że proste EF, HX i BC przecinają się w jednym punkcie.



Sposób 2 (inwersja): Rozważmy inwersję względem okręgu Ω o średnicy BC. Przez $\mathcal{X}^*$ oznaczmy obraz obiektu $\mathcal{X}$ w tym przekształceniu. Oczywiście wiemy, że $\sphericalangle BEC = \sphericalangle BFC = 90°$, czyli punkty E, F leżą na tym okręgu. Ponadto przeliczając kąty mamy

$$\sphericalangle EFA = \sphericalangle BCE = \sphericalangle MEC, \qquad \sphericalangle FEA = \sphericalangle CBF = \sphericalangle MFB$$

czyli z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia o kącie między styczną a cięciwą wynika, że proste ME i MF są styczne do okręgu opisanego na trójkącie AEF, tym samym okrąg ten jest ortogonalny do okręgu Ω. Wynika z tego, że $A = X^*$, oraz że $\sphericalangle HH^*A = 90°$. Jednak widzimy, że jeżeli A' jest odbiciem punktu H względem punktu M, to zachodzi $\sphericalangle A'H^*A = 90°$, czyli punkt H^* leży na prostej MH. Teza sprowadza się istotnie do pokazania, że okrąg opisany na trójkącie H^*AM przecina okrąg opisany na trójkącie MEF w punkcie różnym od punktu M leżącym na prostej BC. Zauważmy jednak, że oznaczając przez D spodek wysokości opuszczonej z punktu A w trójkącie ABC mamy, że punkt D leży na okręgu 9 punktów tego trójkąta, czyli na okręgu opisanym na trójkącie MEF, oraz skoro $\sphericalangle MH^*A = \sphericalangle MDA$, to leży on także na okręgu opisanym na trójkącie H^*AM.



4. Znajdź minimalną wartość wyrażenia $3x^2 + 3y^2 + z^2$, jeśli $xy + yz + zx = 1$.

Rozwiązanie: $\min(3x^2 + 3y^2 + z^2) = 2$.

Sposób 1: Zauważmy, że zachodzi zależność

$$3x^2 + 3y^2 + z^2 - 2 = 3x^2 + 3y^2 + z^2 - 2(xy + yz + zx) = (x + y - z)^2 + 2(x - y)^2 \geqslant 0$$

z której wynika, że wyrażenie z treści zadania jest nie mniejsze od 2. Pozostaje zauważyć, że równość w otrzymanej powyżej nierówności zachodzi wtedy, gdy $x + y - z = 0$ oraz $x - y = 0$, czyli gdy $x = y$ i $z = 2x$. Podstawiając te liczby do warunku $xy + yz + zx = 1$ otrzymujemy

$$x^2 + 2x^2 + 2x^2 = 1 \Longrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Widzimy, że dla trójki $(x, y, z) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ wyrażenie z treści zadania przyjmuje wartość 2.

Sposób 2 (podstawienia trygonometryczne): Załóżmy, że nie wszystkie spośród x, y, z są tego samego znaku. Rozważmy istotnie trójkę x_0, y_0, z_0, w której x_0 jest dodatnie, a y_0, z_0 są ujemne. Wtedy mamy, że $|x_0y_0| + |y_0z_0| + |z_0x_0| > x_0y_0 + y_0z_0 + z_0x_0$. Tym samym rozważając $x = x_0$, $y = |y_0|$ oraz $z = |z_0|$ otrzymujemy $xy + yz + zx > 1$, i dzieląc x, y, z przez pewną stałą otrzymujemy wartość wyrażenia $3x^2 + 3y^2 + z^2$ mniejszą niż $3x_0^2 + 3y_0^2 + z_0^2$. Załóżmy wówczas, że x, y, z są tego samego znaku, oraz bez straty ogólności, że każda zmienna jest dodatnia. Wtedy z warunku $xy + yz + zx = 1$ wynika, że istnieją takie liczby dodatnie A, B, C, że $x = \operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}\right)$, $y = \operatorname{tg}\left(\frac{B}{2}\right)$, $z = \operatorname{tg}\left(\frac{C}{2}\right)$, gdzie $A + B + C = \pi$. Z wykresu funkcji tg wynika, że funkcja $\operatorname{tg}^2(x)$ jest wypukła, tym samym z nierówności Jensena otrzymujemy zależność

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2(x) + \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2(y) \geqslant \operatorname{tg}^2\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

z czego otrzymujemy nierówność

$$3x^2 + 3y^2 + z^2 = 3\operatorname{tg}^2\left(\frac{A}{2}\right) + 3\operatorname{tg}^2\left(\frac{B}{2}\right) + \operatorname{tg}^2\left(\frac{C}{2}\right) \geqslant 6\operatorname{tg}^2\left(\frac{A+B}{4}\right) + \operatorname{tg}^2\left(\frac{C}{2}\right).$$

Zauważmy, że skoro $\frac{C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} - \frac{B}{2}$, to $\operatorname{tg}\left(\frac{C}{2}\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{A+B}{2}\right)$. Wówczas z tożsamości $\operatorname{tg}(2x) = \frac{2\operatorname{tg}(x)}{1-\operatorname{tg}^2(x)}$ mamy

$$\operatorname{tg}\left(\frac{C}{2}\right) = \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{A+B}{2}\right)} = \frac{1 - \operatorname{tg}\left(\frac{A+B}{4}\right)}{2\operatorname{tg}\left(\frac{A+B}{4}\right)}.$$

Oznaczając ostatecznie $\operatorname{tg}\left(\frac{A+B}{4}\right) = t$ otrzymujemy

$$3x^2 + 3y^2 + z^2 \geqslant 6t^2 + \left(\frac{1-t^2}{2t}\right)^2 = \frac{25t^4 - 2t^2 + 1}{4t^2} = \frac{(5t^2-1)^2 + 8t^2}{4t^2} = \left(\frac{5t^2-1}{2t}\right)^2 + 2 \geqslant 2.$$

Równość zachodzi wtedy, gdy $5t^2 - 1 = 0$ oraz gdy w nierówności Jensena argumenty są równe, czyli $A = B$. Otrzymujemy wtedy $x = y = \frac{1}{\sqrt{5}}$ oraz $z = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Podstawiając to do równania wyjściowego widzimy, że mamy

$$xy + yz + zx = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5}, \qquad 3x^2 + 3y^2 + z^2 = \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5} = 2.$$

Mecz Matematyczny

1. Wyznaczyć wszystkie trójki liczb całkowitych x, y, z spełniające równanie

$$\frac{x+y+xyz}{yz+1} = \frac{2025}{44}.$$

Rozwiązanie: Zauważmy najpierw, że musi zachodzić $yz+1 \neq 0$. Ponadto

$$\frac{x+y+xyz}{yz+1} = \frac{x(yz+1)+y}{yz+1} = x + \frac{y}{yz+1}$$

zatem $x + \frac{y}{yz+1} = \frac{2025}{44}$, czyli po przekształceniu

$$44y = (2025 - 44x)(yz+1).$$

Oznaczmy $A = 2025 - 44x$. Wtedy $A \equiv 1 \pmod{44}$, więc $\mathrm{NWD}(A, 44) = 1$. Z równości $44y = A(yz+1)$ wynika, że $A \mid 44y$, a ponieważ $\mathrm{NWD}(A, 44) = 1$, mamy $A \mid y$. Możemy więc zapisać $y = At$ dla pewnego $t \in \mathbb{Z}$. Podstawiając to do równania $44y = A(yz+1)$, otrzymujemy

$$44At = A(Atz+1).$$

Ponieważ $A \neq 0$, możemy podzielić przez A, skąd $44t = Atz + 1$, czyli $Atz = 44t - 1$. Lewa strona jest podzielna przez t, więc prawa strona również jest podzielna przez t. Zatem $t \mid 1$, stąd $t = 1$ lub $t = -1$. Rozważmy wówczas dwa przypadki:

• Niech $t = 1$. Wtedy $y = A$ oraz $Az = 43$. Zatem $A \mid 43$. Ponieważ jednocześnie $A \equiv 1 \pmod{44}$, dostajemy dwa przypadki:

1. $A = 1$. Wtedy $2025 - 44x = 1$, czyli $x = 46$. Ponadto $y = 1$ oraz $z = 43$.
2. $A = -43$. Wtedy $2025 - 44x = -43$, czyli $x = 47$. Ponadto $y = -43$ oraz $z = -1$.

Dostajemy w ten sposób rozwiązania $(x, y, z) = (46, 1, 43)$ oraz $(x, y, z) = (47, -43, -1)$.

• Niech $t = -1$. Wtedy $y = -A$ oraz $Az = 45$. Zatem $A \mid 45$. Ponieważ jednocześnie $A \equiv 1 \pmod{44}$, dostajemy dwa przypadki:

1. $A = 1$. Wtedy $2025 - 44x = 1$, czyli $x = 46$. Ponadto $y = -1$ oraz $z = 45$.
2. $A = 45$. Wtedy $2025 - 44x = 45$, czyli $x = 45$. Ponadto $y = -45$ oraz $z = 1$.

Dostajemy w ten sposób rozwiązania $(x, y, z) = (46, -1, 45)$ oraz $(x, y, z) = (45, -45, 1)$.
Możemy łatwo sprawdzić, że wszystkie otrzymane trójki spełniają równanie z treści zadania.

Odpowiedź: $(x, y, z) = (46, 1, 43), (46, -1, 45), (47, -43, -1), (45, -45, 1)$.

2. Czy istnieje rosnący ciąg liczb całkowitych dodatnich $a_1, a_2, \ldots$, taki że dla każdego rosnącego ciągu arytmetycznego $b_1, b_2, \ldots$, istnieje co najwyżej skończenie wiele liczb pierwszych w postaci $a_i + b_i$?

Rozwiązanie: Tak, istnieje.

Sposób I: Rozważmy ciąg $\langle a_i \rangle$ zdefiniowany przez $a_n = (n^2)!$ dla każdej dodatniej liczby całkowitej n. Weźmy dowolny rosnący ciąg arytmetyczny $\langle b_i \rangle$. Ponieważ rośnie on liniowo, to istnieje takie N, że dla każdego $n > N$ zachodzi $1 < b_n \leqslant n^2$. Wtedy, skoro b_n jest dodatnią liczbą całkowitą nie większą niż n^2, mamy $b_n \mid (n^2)!$, a więc $b_n \mid a_n$, $b_n \mid a_n + b_n$.

Sposób II: Zauważmy, że aby dany ciąg arytmetyczny $\langle b_i \rangle$ miał nieskończenie wiele elementów całkowitych dodatnich, to we wzorze ogólnym ciągu arytmetycznego $an + b$ liczby a, b muszą być wymierne. Skoro liczb wymiernych jest tyle samo, ile liczb naturalnych, to rozważając ciągi $\langle b_i \rangle$, które mają sens w kontekście treści zadania, możemy każdy z nich ponumerować. Przez $b_{i,j}$ będziemy wówczas rozważać i-ty wyraz j-tego ciągu w tak przyjętej numeracji. Oznaczmy także przez $p_1, p_2, \ldots$ kolejne liczby pierwsze. Dla danego i rozważmy taką liczbę a_i, która spełnia układ kongruencji

$$\begin{cases} a_i \equiv -b_{i,1} \pmod{p_1} \\ a_i \equiv -b_{i,2} \pmod{p_2} \\ \ldots \\ a_i \equiv -b_{i,i} \pmod{p_i} \end{cases}$$

przy czym liczbę $b_{i,j}$ rozważamy w układzie kongruencji tylko wtedy, gdy jest ona całkowita. Taka liczba a_i istnieje na mocy Chińskiego Twierdzenia o Resztach. Ponadto możemy dobrać dowolnie duże a_i. Zauważmy, że postępując analogicznie dla każdego następnego $j = i, i+1, \ldots$ otrzymamy, że liczba $a_j + b_{j,i}$ nie jest pierwsza. Skoro j jest dowolne, to dla każdego ciągu arytmetycznego $\langle b_i \rangle$ otrzymujemy skończenie wiele liczb pierwszych postaci $a_i + b_i$.

3. Dane są całkowite i dodatnie liczby a i b. Udowodnić, że dla dowolnie dużej liczby n równanie

$$x^2 - 2axy + (a^2 - 4b)y^2 + 4by = z^2$$

ma rozwiązanie w liczbach całkowitych (x_0, y_0, z_0) spełniające warunek $\min(x_0, y_0, z_0) > n$.

Rozwiązanie: Przekształcając równanie wyjściowe mamy

$$0 = x^2 - 2axy + a^2y^2 - 4by^2 + 4by - z^2 = (x - ay)^2 - z^2 - 4by^2 + 4by$$
$$(x - ay - z)(x - ay + z) = 4by(y - 1)$$

Ponieważ $y - 1 < 4by$, to możemy wybrać

$$\begin{cases} x - ay - z = y - 1 \\ x - ay + z = 4by \end{cases}$$

Odejmując te równania stronami otrzymujemy

$$2z = (x - ay + z) - (x - ay - z) = 4by - y + 1 \quad \iff \quad z = \frac{y(4b - 1) + 1}{2}$$

Natomiast dodając te równania stronami dostajemy

$$2x - 2ay = (x - ay - z) + (x - ay + z) = 4by + y - 1 \quad \iff \quad x = \frac{y(2a + 4b + 1) - 1}{2}$$

Widzimy, że dla nieparzystego y, liczby x, z są całkowite. Niech $y > n^{67} > n$ będzie nieparzyste. Wówczas $z > \frac{n^{67} \cdot 3+1}{2} > n^{67} > n$ oraz $x > \frac{n^{67} \cdot (2+4+1)-1}{2} > n^{67} > n$, zatem wybierając dostatecznie duże y możemy otrzymać takie x, y, że $x, y, z > n$, co kończy dowód.

4. Różne niezerowe liczby rzeczywiste a, b, c spełniają równości

$$a^2 + \frac{1}{a} = b^2 + \frac{1}{b} = c^2 + \frac{1}{c}.$$

Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości sumy $a + b + c$.

Rozwiązanie: $a + b + c = 0$.

Sposób I: Przekształćmy równoważnie równanie:

$$a^2 + \frac{1}{a} = b^2 + \frac{1}{b} \quad \iff \quad \frac{a^3+1}{a} = \frac{b^3+1}{b}$$
$$a^3b + b = ab^3 + a$$
$$0 = a^3b - ab^3 - a + b = ab(a^2 - b^2) - (a - b) = ab(a - b)(a + b) - (a - b) = (a - b)(ab(a + b) - 1)$$

Ponieważ $a \neq b$, to $ab(a+b) = 1$. Analogicznie $bc(b+c) = 1$ oraz $ca(c+a) = 1$. Mnożąc te równania stronami przez odpowiednio c, a oraz b, dostajemy

$$\begin{cases} abc(a+b) = c \\ abc(b+c) = a \\ abc(c+a) = b \end{cases}$$

Dodając stronami te równania dostajemy

$$\begin{aligned} abc(a+b) + abc(b+c) + abc(c+a) &= c + a + b \\ abc(2a + 2b + 2c) &= a + b + c \\ 2abc(a+b+c) - (a+b+c) &= 0 \\ (2abc - 1)(a+b+c) &= 0 \end{aligned}$$

Pokażemy, że nie może zachodzić równość $abc = \frac{1}{2}$. Załóżmy nie wprost, że tak jest. Wówczas podstawiając tę wartość do powyższego układu równań, dostajemy

$$\begin{cases} a + b = 2c \\ b + c = 2a \\ c + a = 2b \end{cases}$$

Odejmując stronami pierwsze dwa równania, dostajemy $(a + b) - (b + c) = 2c - 2a$, czyli $3a = 3c$, sprzeczność. Zatem będzie zachodziła równość $a + b + c = 0$.

Sposób II: Oznaczmy $a^2 + \frac{1}{a} = k$. Wtedy rozważając wielomian

$$P(x) = x^3 - kx + 1$$

widzimy, że jego pierwiastkami są $x = a, b, c$. Wtedy z wzorów Viete'a mamy, że

$$a + b + c = \frac{0}{1} = 0.$$

5. Funkcja g przyporządkowuje każdej (uporządkowanej) parze x, y liczb rzeczywistych dodatnich wartość $g(x, y)$ określoną jako najmniejsza liczba z trójki x, $1/y$, $(xy+1)/x$. Wyznaczyć kres górny wartości $g(x, y)$, gdy x oraz y przebiegają zbiór wszystkich liczb dodatnich.

Rozwiązanie: Zauważmy, że

$$\frac{xy+1}{x} = y + \frac{1}{x}.$$

Zauważmy, że z treści zadania mamy zależności

$$x \geqslant g(x,y) \Longrightarrow \frac{1}{g(x,y)} \geqslant \frac{1}{x}, \qquad \frac{1}{y} \geqslant g(x,y) \Longrightarrow \frac{1}{g(x,y)} \geqslant y$$

co daje nam nierówność

$$g(x,y) \leqslant y + \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{g(x,y)} + \frac{1}{g(x,y)} \Longrightarrow g(x,y)^2 \leqslant 2$$

tym samym $g(x, y) \leqslant \sqrt{2}$. Widzimy, że ograniczenie to jest osiągane przy $x = \frac{1}{y} = y + \frac{1}{x}$, czyli $x = \sqrt{2}$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

6. Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych nieujemnych a,b,c zachodzi nierówność

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} + \sqrt{c^2 - ca + a^2} \leqslant a + b + c + \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca}.$$

Rozwiązanie: Nierówność z treści zadania jest symetryczna, więc możemy założyć, że c jest najmniejsza spośród liczb a, b, c. Niech $f(x, y) = \sqrt{x^2 - xy + y^2}$. Na początku pokażemy lemat dla dowolnych nieujemnych liczb rzeczywistych x, y, z:

$$f(x + z, y + z) \leqslant f(x, y) + z.$$

Jeżeli $z = 0$, to zachodzi równość. W innym przypadku po podniesieniu obu stron do kwadratu otrzymujemy nierówność równoważną

$$(x + z)^2 - (x + z)(y + z) + (y + z)^2 \leqslant (f(x, y) + z)^2$$

czyli

$$x^2 - xy + y^2 + z(x + y) + z^2 \leqslant x^2 - xy + y^2 + 2zf(x, y) + z^2$$

co jest równoważne nierówności

$$x + y \leqslant 2f(x, y) \Longleftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 \leqslant 4x^2 - 4xy + 4y^2 \Longleftrightarrow 0 \leqslant 3(x - y)^2$$

która jest oczywiście prawdziwa. Bez straty ogólności załóżmy, że $c = \min(a, b, c)$. Wtedy $a - c \geqslant 0$ oraz $b - c \geqslant 0$. Zauważmy, że zachodzi tożsamość

$$\begin{aligned}(a - c)^2 - (a - c)(b - c) + (b - c)^2 &= a^2 - 2ac + c^2 - ab + bc + ac - c^2 + b^2 - 2bc + c^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca.\end{aligned}$$

Z lematu otrzymujemy zależności:

$$\begin{gathered} f(a,b) = f((a-c)+c,(b-c)+c) \leqslant f(a-c,b-c)+c \\ f(b,c) = f((b-c)+c,0+c) \leqslant f(b-c,0)+c \\ f(c,a) = f(0+c,(a-c)+c) \leqslant f(0,a-c)+c \end{gathered}$$

które po dodaniu do siebie zamieniają się w nierówność

$$\begin{aligned} f(a,b)+f(b,c)+f(c,a) &\leqslant f(a-c,b-c)+f(b-c,0)+f(0,a-c)+3c \\ &= \sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}+a+b+c. \end{aligned}$$

7. Dany jest zbiór $n \geqslant 2$ punktów leżących wewnątrz kuli o promieniu 1. Dla $i = 1, 2, \ldots, n$ niech x_i oznacza odległość i-tego punktu danego zbioru od najbliższego innego punktu tego zbioru. Dowieść, że

$$x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3 \leqslant 64.$$

Rozwiązanie: Oznaczmy $i-$ty punkt z danego zbioru przez P_i. Dla każdego $i = 1, 2, \ldots, n$ rozważmy kulę $\mathcal{K}_i$ o środku w punkcie P_i i promieniu $\frac{x_i}{2}$. Zauważmy, że dla dowolnych $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $i \neq j$ zachodzi $x_i, x_j \leqslant |P_iP_j|$. Stąd $\frac{x_i}{2} + \frac{x_j}{2} \leqslant \frac{|P_iP_j|}{2} + \frac{|P_iP_j|}{2} = |P_iP_j|$, więc kule $\mathcal{K}_i$ i $\mathcal{K}_j$ są rozłączne. Ponadto $\frac{x_i}{2} \leqslant 1$, więc wszystkie kule $\mathcal{K}_i$ leżą wewnątrz pewnej kuli $\mathcal{K}$ o promieniu 2. Niech $V(\mathcal{B})$ oznacza objętość bryły $\mathcal{B}$. Wówczas

$$\sum_{i=1}^{n} V(\mathcal{K}_i) \leqslant V(\mathcal{K})$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{x_i}{2}\right)^3 \leqslant \frac{4}{3}\pi \cdot 2^3 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i^3 \leqslant 64$$

co kończy dowód.

8. Króla szachowego ustawiono na pewnym polu szachownicy 8×8 i wykonano nim 64 ruchy tak, że odwiedził wszystkie pola planszy i wrócił na pole początkowe. Ruch nazwiemy *konopnickim*, jeżeli na skutek jego wykonania zmniejszyła się odległość środka pola, na którym stoi król, od środka szachownicy. Jaka jest największa możliwa liczba konopnickich ruchów?

Rozwiązanie: Ponumerujmy pola planszy tak, aby pola z tą samą liczbą były równoodległe od środka, oraz że jeżeli jedno pole ma w siebie wpisaną liczbę mniejszą od liczby w innym polu, to jest ono bliżej środka planszy. Policzymy najmniejszą możliwą liczbę ruchów niekonopnickich rozważając trzy rodzaje ruchów.

1. Ruchy z pól oznaczone liczbą 1 - są one zawsze niekonopnickie, co daje nam co najmniej 4 ruchy niekonopnickie.

2. Ruchy z pól oznaczonych liczbą 2 - są one konopnickie tylko wtedy, gdy prowadzą na pole z liczbą 1. Skoro pól z liczbą 2 jest 8 oraz są 4 pola z liczbą 1, to otrzymujemy co najmniej 4 ruchy niekonopnickie.

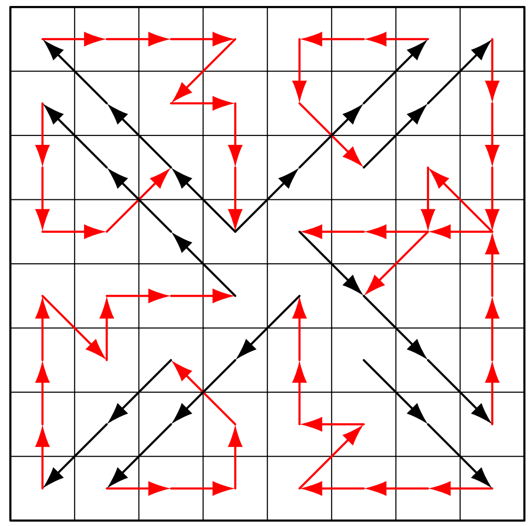
3. Ruchy prowadzące na pola z liczbami nie mniejszymi od 6 - ruchy te nie mogą wychodzić z pól oznaczonych liczbami $1, 2$ i będą one konopnickie tylko wtedy, gdy wyjdą one z pola oznaczonego liczbą nie mniejszą niż 7. Pól z liczbą 7 jest 20, a pól z liczbą 6 jest 32, co daje nam co najmniej $32 - 20 = 12$ ruchów niekonopnickich.

Otrzymujemy w ten sposób, że ruchów konopnickich jest co najwyżej

$$64 - 4 - 4 - 12 = 44.$$

Na poniższym rysunku znajduje się przykład drogi, w której liczba ruchów konopnickich jest równa dokładnie 44.

9	8	7	6	6	7	8	9
8	6	5	4	4	5	6	8
7	5	3	2	2	3	5	7
6	4	2	1	1	2	4	6
6	4	2	1	1	2	4	6
7	5	3	2	2	3	5	7
8	6	5	4	4	5	6	8
9	8	7	6	6	7	8	9



9. Zawodnicy $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{2004}$ biorą udział w Meczu Matematycznym. Zawodnicy Z_{2003} i Z_{2004} są kapitanami i wybierają swoje drużyny według następującego algorytmu: w każdej rundzie najpierw kapitan Z_{2004} wyznacza zawodnika spośród dotąd niewybranych, a Z_{2003} decyduje, do której drużyny on trafi, następnie Z_{2003} wyznacza zawodnika spośród dotąd niewybranych, a Z_{2004} decyduje, do której drużyny on trafi. Procedura powtarzana jest do momentu, w którym jedna z drużyn będzie liczyć już 1002 zawodników – wtedy wszyscy pozostali trafiają do drużyny przeciwnej. Dla każdego i zawodnik Z_i rozwiąże podczas meczu i zadań, przy czym każde zadanie zostanie rozwiązane przez co najwyżej jednego zawodnika. Mecz wygra drużyna, która rozwiąże łącznie więcej zadań. Rozstrzygnąć, który z kapitanów (jeśli którykolwiek) posiada strategię wybierania drużyny pozwalającą mu, niezależnie od zachowania przeciwnika, zapewnić swojej drużynie zwycięstwo w Meczu Matematycznym.

Rozwiązanie: Najpierw przedstawimy strategię kapitana Z_{2003} zapewniającą mu co najmniej remis. Otóż w każdej rundzie, w której Z_{2004} wyznaczy Z_k, Z_{2003} bierze go do swojej drużyny, jeśli tylko $k > 1002$, w przeciwnym wypadku go odrzuca. Następnie wyznacza zawodnika Z_{2003-k}. Po tak rozegranej rundzie albo któraś z drużyn wzbogaci się o dwóch zawodników i 2005 zadań, albo obie drużyny wezmą po jednym zawodniku, przy czym Z_{2003} weźmie zawodnika o większym numerze niż Z_{2004}. Ponieważ jednak Z_{2003} ma w swojej drużynie do obsadzenia nieparzystą liczbę miejsc, to w którejś rundzie musiał wziąć dokładnie jednego zawodnika, a zatem zyskać przewagę nad drużyną zawodnika Z_{2004} i co najmniej wyrównać liczbę zadań rozwiązanych podczas Meczu.

Strategia kapitana Z_{2004} może natomiast wyglądać jak poniżej:

Na początku gry wyznacza on zawodnika Z_{1002}, a na kolejne ruchy przeciwnika reaguje następująco (załóżmy, że przeciwnik wyznaczył zawodnika Z_k):

Przypadek 1. $k = 1001$. Wtedy podejmuje taką decyzję, aby Z_{1001} i Z_{1002} znaleźli się w różnych drużynach. Na takiej "wymianie" może on stracić co najwyżej jedno zadanie. Dalej wyznacza zgodnie z metodą opisaną w przypadku 2.

Przypadek 2. $k \neq 1001$. Jeśli $k > 1002$, to bierze tego zawodnika, w przeciwnym wypadku go odrzuca i w najbliższej rundzie: jeżeli Z_{2003-k} jest jeszcze niewybrany, to go wyznacza, jeżeli już był, to wyznacza dowolnego zawodnika Z_l takiego, że Z_{2003-l} również pozostaje nadal niewybrany. Łatwo zauważyć, że przy tej strategii taki zawodnik będzie zawsze istniał (par postaci $(i, 2003-i)$ jest nieparzyście wiele, więc jeśli drugi gracz mógł "napocząć" nową parę, to pierwszy w kolejnym ruchu także będzie mógł to zrobić).

Rozumowanie analogiczne do przedstawionego przy strategii kapitana Z_{2003} pokazuje, że, pomijając kapitanów zawodników Z_{1001} i Z_{1002}, którzy znajdą się na pewno w przeciwnych drużynach, zawodnicy wybrani przez Z_{2004} rozwiążą w sumie przynajmniej tyle zadań, co zawodnicy wybrani przez Z_{2003}.

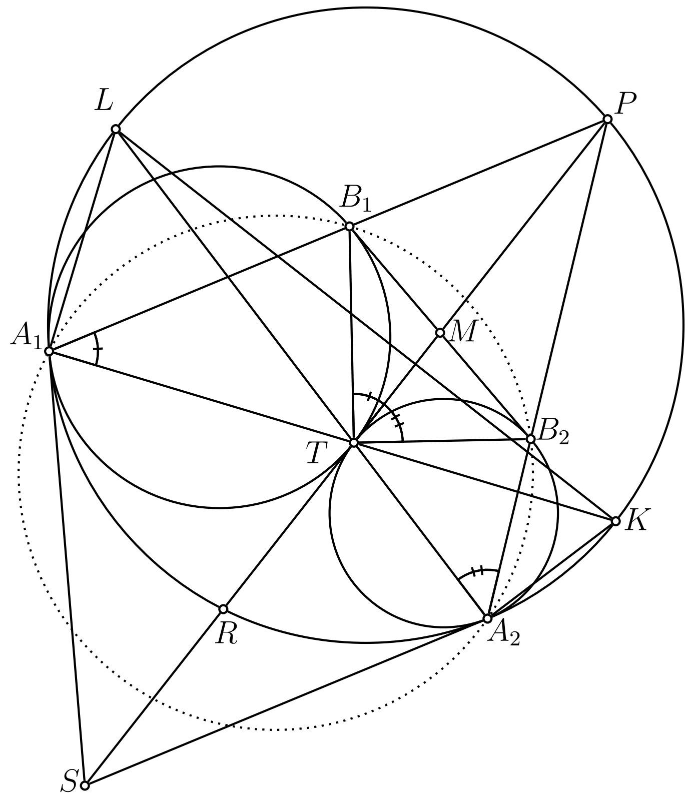
10. Okręgi ω_1 i ω_2 są styczne zewnętrznie w punkcie T i styczne wewnętrznie do okręgu ω odpowiednio w punktach A_1 i A_2. Niech P będzie punktem przecięcia ω ze wspólną styczną ω_1 i ω_2 w T. Prosta PA_1 przecina ω_1 po raz drugi w punkcie B_1, a prosta PA_2 po raz drugi okrąg ω_2 w punkcie B_2. Udowodnić, że B_1B_2 jest wspólną styczną okręgów ω_1 i ω_2.

Rozwiązanie:

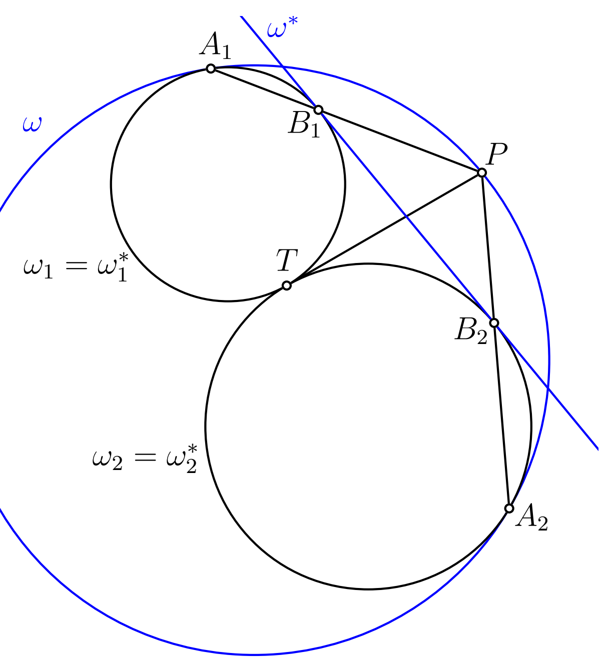
Sposób I: Oznaczmy przez S punkt przecięcia prostych stycznych do okręgu ω w punktach A_1, A_2. Wtedy z twierdzenia o trzech osiach potęgowych dla $\omega_1, \omega_2, \omega$ widzimy, że punkt S leży na prostej PT. Niech R będzie punktem przecięcia prostej PT z okręgiem ω różnym od punktu P. Ponadto z potęgi punktu P mamy, że $PA_1 \cdot PB_1 = PT^2 = PA_2 \cdot PB_2$, czyli punkty A_1, B_1, A_2, B_2 leżą na jednym okręgu, czyli prosta B_1B_2 jest antyrównoległą prostej A_1A_2 w kącie $\sphericalangle A_1PA_2$. Stąd widzimy, że jeżeli prosta PT przecina odcinek B_1B_2 w punkcie M, to M jest środkiem tego odcinka. Niech K, L oznaczają przecięcia prostych A_1T, A_2T z okręgiem ω, różne od punktów A_1, A_2. Wtedy w jednokładności o środku w punkcie A_1 przenoszącej ω_1 na ω wynika, że prosta styczna do ω w punkcie K jest równoległa do prostej PR, czyli K jest środkiem łuku PR okręgu ω. Analogicznie punkt L jest środkiem drugiego łuku PR okręgu ω, stąd KL jest średnicą okręgu ω. Przenosząc wówczas kąty mamy z twierdzenia o kącie między styczną a cięciwą

$$\sphericalangle B_1TB_2 = \sphericalangle B_1TP + \sphericalangle B_2TP = \sphericalangle B_1A_1T + \sphericalangle B_2A_2T = \sphericalangle KA_1P + \sphericalangle PA_1L = 90^\circ$$

stąd punkt M jest także środkiem okręgu opisanego na trójkącie B_1TB_2, czyli $MT = MB_1$ i $\sphericalangle B_1TM = \sphericalangle TB_1M$. Ostatecznie z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia o kącie między styczną a cięciwą mamy, że skoro $\sphericalangle TB_1M = \sphericalangle B_1TM = \sphericalangle B_1A_1T$, to prosta B_1B_2 jest styczna do ω_1, i analogicznie jest ona także styczna do okręgu ω_2.



Sposób II: Rozważmy inwersję o środku w punkcie P i promieniu PT. Obraz X w tej inwersji będziemy oznaczali przez X^*. Z twierdzenia o stycznej i siecznej mamy $PT^2 = PA_1 \cdot PB_1 = PA_2 \cdot PB_2$, więc $A_1^* = B_1$ oraz $A_2^* = B_2$. Punkt T przechodzi na samego siebie, więc okrąg ω_1 przejdzie na okrąg przechodzący przez punkty $T^* = T$, $A_1^* = B_1$ i $B_1^* = A_1$, czyli okrąg ω_1, tj. $\omega_1^* = \omega_1$. Analogicznie $\omega_2^* = \omega_2$. Okrąg ω przechodzi przez P i jest styczny do ω_1 i ω_2 w A_1 i A_2, więc ω^* będzie prostą styczną do ω_1 w $A_1^* = B_1$ oraz styczną do ω_2^* w $A_2^* = B_2$. Stąd prosta B_1B_2 jest wspólną styczną zewnętrzną okręgów ω_1 i ω_2, co kończy dowód.



11. Na obwodzie trójkąta ABC wybrano punkty D_1, D_2, E_1, E_2, F_1, F_2 w następującej kolejności A, F_1, F_2, B, D_1, D_2, C, E_1, E_2. Ponadto

$$AD_1 = AD_2 = BE_1 = BE_2 = CF_1 = CF_2.$$

Udowodnić, że obwody trójkątów wyznaczonych przez proste AD_1, BE_1, CF_1 oraz AD_2, BE_2, CF_2 są równe.

Rozwiązanie: Niech X_1, Y_1, Z_1 będą przecięciami prostych BE_1 i CF_1, CF_1 i AD_1 oraz AD_1 i BE_1. Niech X_2, Y_2, Z_2 będą przecięciami prostych BE_2 i CF_2, CF_2 i AD_2 oraz AD_2 i BE_2. Niech A' będzie takim punktem, że czworokąt $ABA'C$ jest równoległobokiem. Niech K, L, M, N będą rzutami prostokątnymi punktu A' na proste odpowiednio BX_2, BX_1, CX_2, CX_1. Mamy wówczas $[A'BE_1] = [A'BC] = [A'CF_1]$, co wraz z $BE_1 = CF_1$ daje równość $A'L = A'N$. Analogicznie pokazujemy, że $A'K = A'M$. Podobnie widzimy, że $[A'BE_1] = [A'BC] = [A'CF_2]$, co wraz z $BE_1 = CF_2$ daje $A'L = A'M$. Stąd punkt A' jest równoodległy od prostych BX_2, BX_1, CX_2, CX_1. Stąd istnieje okrąg o środku A', który jest styczny do tych prostych w punktach odpowiednio K, L, M, N. Otrzymujemy wówczas równości:

$$\begin{aligned} X_1L = X_1N &\iff X_1B - BL = X_1C + CN \\ X_2K = X_2M &\iff X_2B + BK = X_2C - CM \end{aligned}$$

Ponieważ $BK = BL$ oraz $CM = CN$, to dodając stronami te równania otrzymujemy

$$\begin{gathered} (X_1B - BL) + (X_2B + BK) = (X_1C + CN) + (X_2C - CM) \\ X_1B + X_2B = X_1C + X_2C \end{gathered}$$

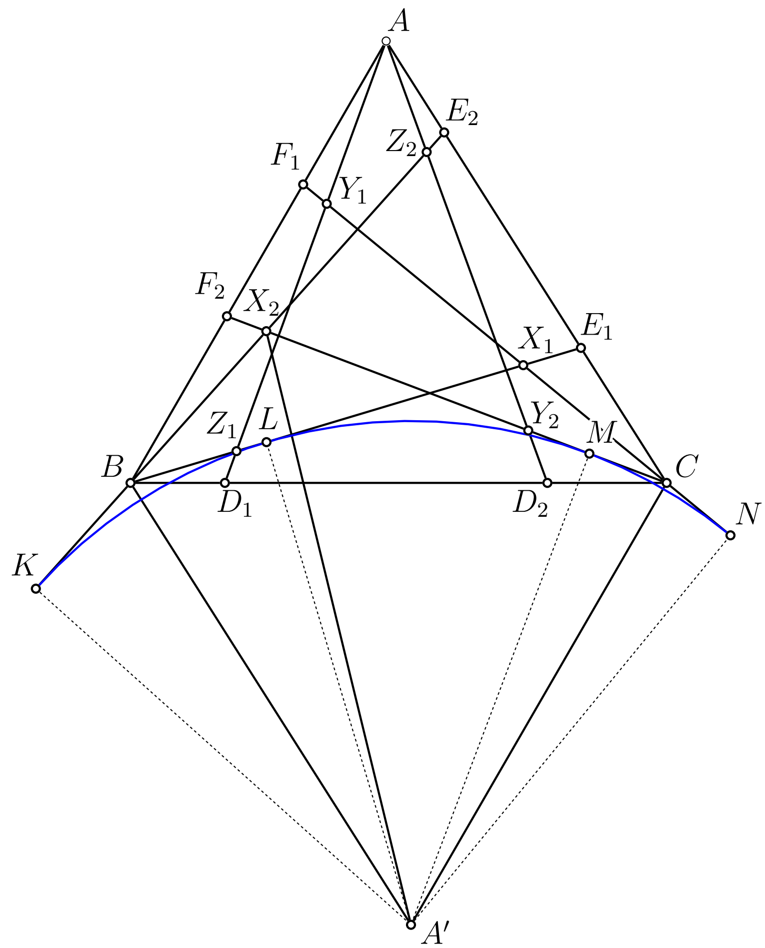
Analogicznie dowodzimy równości

$$\begin{gathered} Y_1C + Y_2C = Y_1A + Y_2A \\ Z_1A + Z_2A = Z_1B + Z_2B \end{gathered}$$

Dodając wszystkie trzy równania stronami otrzymujemy

$$\begin{gathered} (X_1B + X_2B) + (Y_1C + Y_2C) + (Z_1A + Z_2A) = (X_1C + X_2C) + (Y_1A + Y_2A) + (Z_1B + Z_2B) \\ (Y_1C - X_1C) + (Z_1A - Y_1A) + (X_1B - Z_1B) = (X_2C - Y_2C) + (Y_2A - Z_2A) + (Z_2B - X_2B) \\ X_1Y_1 + Y_1Z_1 + Z_1X_1 = X_2Y_2 + Y_2Z_2 + Z_2X_2 \end{gathered}$$

co kończy dowód.

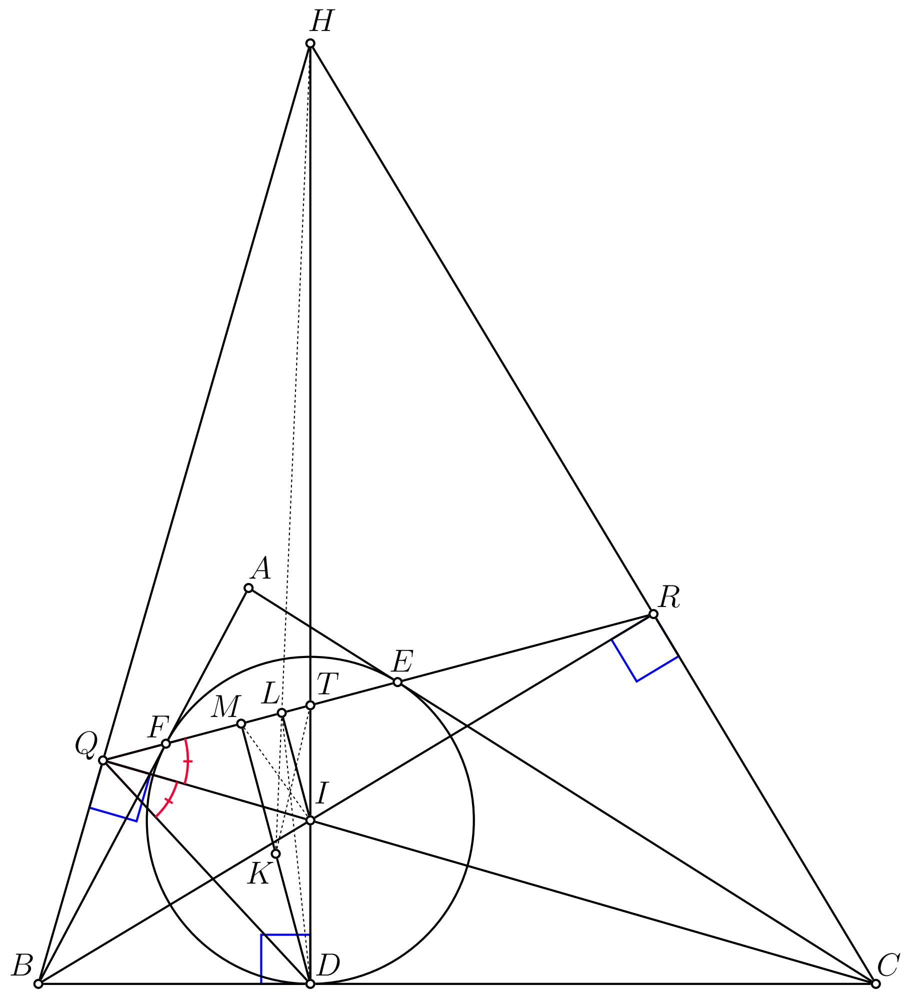


12. Mamy trójkąt ABC, w którym I to środek okręgu wpisanego, a D, E, F to punkty styczności tego okręgu do boków BC, CA, AB odpowiednio. Niech M to rzut D na EF. Udowodnij, że środek DM, EF oraz ortocentrum BIC są współliniowe.

Rozwiązanie: Niech Q, R będą przecięciami prostych odpowiednio CI oraz BI z prostą EF. Niech K i L będą środkami odcinków DM i EF oraz niech H będzie ortocentrum trójkąta BIC. Niech T będzie przecięciem prostej DI z prostą EF. Z tzw. Iranian incircle lemma zachodzą równości kątów $\sphericalangle BQC = \sphericalangle BRC = 90°$, więc punkt Q leży na prostej BH oraz punkt R leży na prostej CH. Ponieważ proste IH oraz DI są prostopadłe do BC, to się pokrywają, tj. punkty D, I, H leżą na jednej prostej. Z cykliczności czworokątów $BCRQ$ oraz $DBQI$ ($\sphericalangle BQC = \sphericalangle BRC = 90°$ oraz $\sphericalangle IDB = \sphericalangle IQB = 90°$) możemy policzyć, że $\sphericalangle TQI = \sphericalangle RQC = \sphericalangle RBC = \sphericalangle IBD = \sphericalangle IQD$, co wraz z $\sphericalangle HQI = 90°$ daje $(D, T; I, H) = -1$ (lemat 2.28 z pracy "Dwustosunek i biegunowe" autorstwa Dominika Burka). Zauważmy teraz, że proste DM i IL są równoległe, ponieważ obie proste są prostopadłe do prostej EF ($EL = FL$ oraz $IE = IF$). Zatem z twierdzenia Talesa mamy $\frac{DI}{IT} = \frac{ML}{LT}$. Ponieważ $DK = MK$, to widzimy, że zachodzi równość

$$\frac{DI}{IT} \cdot \frac{TL}{LM} \cdot \frac{MK}{KD} = 1$$

więc z twierdzenia Cevy wnioskujemy, że proste MI, DL i KT są współpękowe. To wraz z faktem, że $(D, T; I, H) = -1$ daje współliniowość punktów K, L, H (lemat 2.27 z pracy "Dwustosunek i biegunowe" autorstwa Dominika Burka), co kończy dowód.


H
A
R
E
T
L
M
F
Q
I
K
B
D
C